STT-1500 · MODULE 01 · EXERCICES

# Introduction aux probabilités discrètes

Dans cette série, on n'utilise que les outils du module 01 : décrire l'espace fondamental $\Omega$, compter les résultats favorables (à la main, au besoin) et utiliser les propriétés de base de $\mathbb{P}$. Les techniques de dénombrement du module 02 simplifient certains calculs, mais ne sont pas nécessaires.

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

DÉCRIRE Ω ET COMPTER

## Exercice 1

On lance un dé rouge ordinaire, à 6 faces, et un dé bleu à 4 faces numérotées de 1 à 4. Calculez la probabilité que

a) la somme des deux résultats soit supérieure ou égale à 8 ;

b) le résultat du dé rouge soit strictement plus grand que celui du dé bleu.

DÉCRIRE Ω ET COMPTER

## Exercice 2

On fait tourner trois fois une roue de loterie divisée en 5 secteurs égaux, numérotés de 1 à 5.

a) Décrivez l'ensemble $\Omega$ des résultats possibles.

b) Combien l'ensemble $\Omega$ contient-il d'éléments ?

c) Soit $A$ l'événement « le premier numéro est strictement plus petit que le deuxième » et $B$ l'événement « le deuxième numéro est strictement plus petit que le troisième ». Calculez $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(A \cap B)$.

d) Calculez la probabilité que la somme des trois numéros soit inférieure ou égale à 5.

*Indice pour c) : pour compter les éléments de $A \cap B$, classez-les selon la valeur du deuxième numéro.*

DÉCRIRE Ω ET COMPTER

## Exercice 3

Un quiz comporte 5 questions de type vrai ou faux. Une personne qui n'a pas étudié répond à chaque question au hasard.

a) Décrivez l'ensemble des résultats possibles (on note B une bonne réponse et M une mauvaise).

b) Pour $k = 0, 1, \ldots, 5$, calculez la probabilité d'obtenir exactement $k$ bonnes réponses.

DÉCRIRE Ω ET COMPTER

## Exercice 4

Une urne contient $m$ boules numérotées de 1 à $m$. On tire $n$ fois une boule, en la remettant dans l'urne après chaque tirage, et on note la suite des numéros obtenus.

a) Quelle est la probabilité que toutes les boules tirées portent le numéro 1 ?

b) Soit $k \in \{1, \ldots, m\}$. Quelle est la probabilité que tous les numéros tirés soient inférieurs ou égaux à $k$ ?

c) Déduisez-en la probabilité que le plus grand numéro tiré soit exactement $k$.

DÉCRIRE Ω ET COMPTER

## Exercice 5

a) On lance une paire de dés ordinaires. Est-il plus probable que le produit des deux résultats soit pair ou qu'il soit impair ?

b) Même question avec deux dés à 5 faces numérotées de 1 à 5.

c) **(défi)** Même question avec deux dés à $m$ faces numérotées de 1 à $m$. Pour quelles valeurs de $m$ un produit impair est-il plus probable ?

DES POIDS QUI NE SONT PAS ÉGAUX

## Exercice 6

Un dé à 4 faces est truqué : la probabilité d'obtenir la face $j$ est proportionnelle à $j^2$.

*Rappel : une quantité $A$ est proportionnelle à une quantité $B$ s'il existe une constante $k$ telle que $A = kB$.*

a) Décrivez $\Omega$.

b) Déterminez la probabilité de chaque résultat.

c) Calculez la probabilité d'obtenir un résultat supérieur ou égal à 3.

d) Calculez la probabilité d'obtenir un résultat pair.

DES POIDS QUI NE SONT PAS ÉGAUX

## Exercice 7

Un lot de 8 billets de tirage contient 3 billets gagnants. Vous en prenez deux au hasard.

a) Décrivez un espace fondamental $\Omega$ adapté.

b) Donnez le cardinal de $\Omega$.

c) Calculez la probabilité d'obtenir deux billets gagnants.

d) Calculez la probabilité d'obtenir au moins un billet gagnant.

DES POIDS QUI NE SONT PAS ÉGAUX

## Exercice 8

Le philosophe et mathématicien Leibniz croyait qu'avec une paire de dés, une somme de 11 est aussi probable qu'une somme de 12.

a) Montrez qu'une somme de 11 est deux fois plus probable qu'une somme de 12.

b) Quelle erreur de raisonnement peut mener à la conclusion de Leibniz ?

*Pour l'origine historique, voir Sources et attributions.*

DES POIDS QUI NE SONT PAS ÉGAUX

## Exercice 9

D’Alembert croyait qu’en lançant une pièce deux fois, la probabilité d’obtenir au moins une pile est 2/3.

a) Calculez la bonne probabilité.

b) Comment peut-on arriver à 2/3 ?

*Pour l’origine historique, voir Sources et attributions.*

OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

## Exercice 10

Trois amies, Alice, Béatrice et Chloé, passent le même examen. On note $A$, $B$ et $C$ les événements « Alice réussit », « Béatrice réussit » et « Chloé réussit ». Écrivez chacun des événements suivants à l'aide d'unions, d'intersections et de compléments, et hachurez-le sur un diagramme de Venn.

a) Au moins une des trois réussit.

b) Aucune des trois ne réussit.

c) Exactement une des trois réussit.

d) Alice et Béatrice réussissent, mais pas Chloé.

e) Au plus deux des trois réussissent.

OPÉRATIONS SUR LES ÉVÉNEMENTS

## Exercice 11

La *différence symétrique* de $A$ et $B$ est $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ : c'est l'événement « un et un seul des événements $A$ et $B$ se réalise ».

a) Montrez que $\mathbb{P}(A \triangle B) = \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

b) Soit $F$ l'événement « exactement un des événements $A$, $B$, $C$ se réalise ». Montrez que

$$\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - 2\big(\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)\big) + 3\,\mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

*Indice pour b) : notez $r_1$, $r_2$ et $r_3$ les probabilités que exactement un, exactement deux et les trois événements se réalisent. Exprimez $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$ et $\mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C)$ en fonction de $r_1$, $r_2$, $r_3$, en vous aidant d'un diagramme de Venn.*

PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{P}$

## Exercice 12

Parmi les clients d'une épicerie, 55 % achètent du pain, 20 % achètent du pain et du lait, et 80 % achètent au moins l'un des deux. On choisit un client au hasard.

a) Quelle est la probabilité qu'il achète du lait ?

b) Quelle est la probabilité qu'il achète du lait, mais pas de pain ?

PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{P}$

## Exercice 13

On a $\mathbb{P}(A) = 1/3$ et $\mathbb{P}(B) = 1/2$. Calculez $\mathbb{P}(A \cup B)$ et $\mathbb{P}(A \triangle B)$ (voir l'exercice 11) dans chacun des cas suivants.

a) $A \subseteq B$.

b) $A \cap B = \varnothing$.

c) $\mathbb{P}(A \cap B) = 1/6$.

PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{P}$

## Exercice 14

Dans un sondage, 60 % des personnes interrogées disent boire du café et 70 % disent boire du thé. On note $A$ et $B$ ces deux événements pour une personne choisie au hasard.

a) Quelle est la plus petite valeur possible de $\mathbb{P}(A \cup B)$ ?

b) Quelle est la plus grande valeur possible de $\mathbb{P}(A \cup B)$ ?

c) Quelle est la plus petite valeur possible de $\mathbb{P}(A \cap B)$ ?

d) Quelle est la plus grande valeur possible de $\mathbb{P}(A \cap B)$ ?

e) Pour chacune de ces valeurs extrêmes, décrivez une situation où elle est atteinte.

PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{P}$

## Exercice 15

On sait que $\mathbb{P}(A) = 1/3$, $\mathbb{P}(A^c \cap B) = 1/4$ et $\mathbb{P}(A^c \cap B^c \cap C) = 1/5$. Calculez $\mathbb{P}\left((A \cup B \cup C)^c\right)$.

PROPRIÉTÉS DE $\mathbb{P}$

## Exercice 16

On tire deux cartes au hasard, l'une après l'autre, dans un jeu ordinaire de 52 cartes.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir deux cœurs ?

b) Quelle est la probabilité que les deux cartes soient de la même couleur (deux rouges ou deux noires) ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir un as et une figure (valet, dame ou roi), dans n'importe quel ordre ?

COMPLÉMENT, BOOLE ET BONFERRONI

## Exercice 17

a) On lance un dé équilibré 3 fois. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un 6 ?

b) Combien de fois faut-il lancer le dé pour que la probabilité d'obtenir au moins un 6 soit d'au moins 0,95 ?

COMPLÉMENT, BOOLE ET BONFERRONI

## Exercice 18

Ana, Béa et Carl lancent un dé à tour de rôle, dans cet ordre (Ana, Béa, Carl, Ana, Béa, …). Le premier qui obtient un 6 gagne.

a) Quelle est la probabilité qu'Ana gagne à son $k$-ième lancer ?
b) Quelle est la probabilité qu'Ana gagne ?
c) Quelle est la probabilité que Béa gagne ? que Carl gagne ?
d) Quelle est la probabilité que le jeu ne se termine jamais ?

*On admet que les $k$ premiers lancers forment $6^k$ suites équiprobables.*

COMPLÉMENT, BOOLE ET BONFERRONI

## Exercice 19

Un système comporte 5 composantes. Chacune tombe en panne pendant l'année avec probabilité 0,02, mais on ne sait rien de la façon dont les pannes sont liées entre elles.

a) Majorez la probabilité qu'au moins une composante tombe en panne.

b) Minorez la probabilité que les 5 composantes fonctionnent toute l'année.

c) Que deviennent ces bornes avec 60 composantes ?