# Dénombrement

Dans les problèmes de cette série, les résultats sont équiprobables : calculer une probabilité revient à compter, avec $\mathbb{P}(A) = |A|/|\Omega|$. Le plus important est de bien choisir $\Omega$ (ordonné ou non) et de garder le même choix au numérateur et au dénominateur.

**Lien utile :** le problème des rencontres, qui est le même que celui des téléphones vu en classe.

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 1

On aligne au hasard 4 drapeaux rouges et 2 drapeaux bleus sur un mât à 6 crochets. Les drapeaux d'une même couleur ne sont pas distingués (par exemple, RBRRBR est un arrangement).

a) Combien y a-t-il d'arrangements en tout ?

b) Combien d'arrangements ont les deux drapeaux bleus côte à côte ?

c) Combien d'arrangements n'ont jamais deux drapeaux bleus côte à côte ?

d) Combien d'arrangements ont un drapeau bleu à chaque extrémité ?

e) Combien d'arrangements ont les quatre drapeaux rouges ensemble ?

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 2

Combien de mots différents (ayant un sens ou non) peut-on former en permutant les lettres de

a) CANADA ?

b) PROBABILITE ?

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 3

Un mot de passe est formé de 6 lettres minuscules (parmi les 26 lettres de l'alphabet). Combien de mots de passe n'ont jamais deux lettres identiques côte à côte ? (Par exemple, « abacab » convient, mais pas « abbaca ».)

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 4

a) Combien le nombre 10 800 a-t-il de diviseurs positifs ?

b) Combien de ces diviseurs sont pairs ?

*Indice : décomposez-le en facteurs premiers.*

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 5

Un drapeau est formé de trois bandes verticales, colorées avec 5 couleurs disponibles. Deux bandes voisines doivent être de couleurs différentes, mais la première et la troisième peuvent être de la même couleur. En classe, on a compté $5 \cdot 4 \cdot 4 = 80$ drapeaux, en choisissant les bandes de gauche à droite.

Une étudiante propose plutôt : « 5 choix pour la bande de gauche, 5 pour celle de droite, puis 3 pour celle du milieu, puisqu'elle doit différer des deux autres, donc $5 \cdot 5 \cdot 3 = 75$. »

a) Où est l'erreur dans ce raisonnement ?

b) Corrigez son raisonnement en gardant son ordre de choix.

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 6

Huit stagiaires doivent être affectés à huit hôpitaux, un stagiaire par hôpital.

a) De combien de façons peut-on faire les affectations ?

b) Combien d'affectations envoient Alice à l'hôpital de Rimouski ?

c) Si les affectations sont faites au hasard, quelle est la probabilité qu'Alice soit envoyée à Rimouski ?

PRINCIPE DE MULTIPLICATION ET PERMUTATIONS

## Exercice 7

Trois enfants et six adultes s'assoient au hasard sur 9 chaises.

Dans les questions a) et b), les chaises forment une ligne.

a) Quelle est la probabilité que les trois enfants soient côte à côte ?
b) Quelle est la probabilité qu'aucun enfant ne soit assis à une extrémité de la ligne ?

Dans les questions c) et d), les chaises sont disposées autour d'une table ronde.

c) Quelle est la probabilité que les trois enfants soient côte à côte ?
d) Quelle est la probabilité que deux enfants ne soient jamais voisins ?
e) **(défi)** Sur une ligne de $n$ chaises, $k$ enfants et $n - k$ adultes s'assoient au hasard. Quelle est la probabilité que deux enfants ne soient jamais voisins ?

DÉRANGEMENTS

## Exercice 8

À l'entrée d'un examen, $n$ étudiants déposent leur téléphone dans un panier. À la sortie, chacun reprend un téléphone au hasard.

a) Pour $n = 4$, énumérez les façons de redistribuer les téléphones sans que personne ne reprenne le sien.

b) Pour $n = 4$, calculez la probabilité que personne ne reprenne son téléphone.

c) À l'aide de la formule des dérangements, calculez cette probabilité pour $n = 5$.

d) Comparez le résultat de c) à $1/e$.

e) Pour $n = 4$, quelle est la probabilité qu'exactement une personne reprenne son propre téléphone ?

COMBINAISONS

## Exercice 9

Vous achetez un billet de la 6/49 (6 numéros parmi 1 à 49). Pour $k = 0, 1, \ldots, 6$, calculez la probabilité que la combinaison gagnante ait exactement $k$ numéros en commun avec la vôtre.

COMBINAISONS

## Exercice 10

Une main de poker est formée de 5 cartes tirées au hasard dans un jeu de 52 cartes (13 valeurs, 4 couleurs). Calculez la probabilité d'obtenir

a) un carré (quatre cartes de même valeur) ;
b) une main pleine (trois cartes d'une valeur et deux d'une autre) ;
c) deux paires (deux valeurs présentes deux fois, la cinquième carte d'une troisième valeur) ;
d) une paire seulement (une valeur deux fois, les trois autres cartes de valeurs différentes entre elles et de celle de la paire) ;
e) cinq cartes de la même couleur.

COMBINAISONS

## Exercice 11

Un congrès réunit 30 couples, soit 60 personnes. On tire au sort 8 personnes pour former un comité.

a) Quelle est la probabilité que le comité comprenne au moins un des deux membres du couple Tremblay ?

b) Quelle est la probabilité que les 8 membres proviennent de 8 couples différents ?

COMBINAISONS

## Exercice 12

Une boîte contient 20 ampoules, dont 3 sont défectueuses. On en prend 4 au hasard.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une ampoule défectueuse ?

b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une ampoule défectueuse ?

COMBINAISONS

## Exercice 13

Une classe de 20 étudiants est divisée au hasard en 4 équipes de 5. Parmi les étudiants, il y a un groupe de 4 amis.

a) Quelle est la probabilité que les 4 amis soient dans la même équipe ?

b) Quelle est la probabilité que les 4 amis soient dans 4 équipes différentes ?

*Indice : imaginez 20 places, 5 par équipe, attribuées au hasard aux étudiants. Les places des 4 amis forment un ensemble de 4 places choisi au hasard parmi 20.*

COMBINAISONS

## Exercice 14

On choisit au hasard un code de trois chiffres parmi 000, 001, …, 999.

a) Quelle est la probabilité que le chiffre du milieu soit strictement plus grand que chacun des deux autres ?

b) **(défi)** Quelle est la probabilité que le code contienne au moins un 0 et au moins un 1 ?

COMBINAISONS

## Exercice 15

Dans un quartier dont les rues forment une grille, une cycliste part du coin $(0, 0)$ pour se rendre au coin $(5, 4)$. Elle roule toujours vers l'est ou vers le nord, d'un pâté de maisons à la fois.

a) Combien y a-t-il de trajets possibles ?

b) Si elle choisit un trajet au hasard, quelle est la probabilité qu'elle passe devant le café situé au coin $(2, 3)$ ?

COMBINAISONS

## Exercice 16

On place au hasard 4 boules distinctes dans 3 boîtes (chaque boule choisit sa boîte au hasard, indépendamment des autres).

a) Quelle est la probabilité qu'aucune boîte ne reste vide ?

b) **(défi)** Même question avec $n + 1$ boules et $n$ boîtes.

BINÔME ET MULTINÔME

## Exercice 17

À l'aide du binôme de Newton, simplifiez

a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}4^k$ ;

b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k$ ;

c) $\displaystyle\sum_{\substack{0\le k\le n\\ k \text{ pair}}}\binom{n}{k}$ pour $n \ge 1$.

*Indice pour c) : additionnez les développements de* $(1+1)^n$ *et de* $(1-1)^n$.

BINÔME ET MULTINÔME

## Exercice 18

a) Quel est le coefficient de $x^5$ dans le développement de $(x+2)^8$ ?

b) Quel est le coefficient de $x^3y^4$ dans le développement de $(3x-y)^7$ ?

c) Quel est le coefficient de $xy^2z^3$ dans le développement de $(2x+y-z)^6$ ?

BINÔME ET MULTINÔME

## Exercice 19

On considère les mots de 9 lettres formés avec les lettres A, B, C.

a) Combien y en a-t-il ?

b) Combien contiennent exactement trois fois chacune des trois lettres ?

c) Combien contiennent quatre A, trois B et deux C ?

BINÔME ET MULTINÔME

## Exercice 20

On lance quatre dés. Calculez la probabilité d'obtenir

a) quatre résultats identiques ;
b) deux 3 et deux 5 ;
c) un 1, un 2 et deux 6 ;
d) deux paires (deux valeurs différentes, présentes deux fois chacune) ;
e) un triple seulement (une valeur trois fois, la quatrième différente).

BINÔME ET MULTINÔME

## Exercice 21 (défi)

L'identité de Vandermonde dit que, pour des entiers $m, n, r \geq 0$,

$$\binom{m+n}{r} = \sum_{k=0}^{r} \binom{m}{k}\binom{n}{r-k},$$

avec la convention $\binom{a}{b} = 0$ si $b > a$.

a) Un groupe compte $m$ femmes et $n$ hommes. Combien de comités de $r$ personnes comprennent exactement $k$ femmes ?

b) Déduisez-en l'identité.

c) Vérifiez-la avec $m = 4$, $n = 3$ et $r = 3$.

d) Avec $m = n = r$, déduisez-en que $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$.

La formule de Stirling dit que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\,(n/e)^n$, ce qui signifie que le quotient des deux membres tend vers 1.

FORMULE DE STIRLING

## Exercice 22

a) Cinq amis choisissent chacun au hasard l'un des 5 restaurants du quartier, indépendamment les uns des autres. Quelle est la probabilité que chaque restaurant reçoive exactement un ami ?

b) On remplace 5 par $n$ : $n$ amis, $n$ restaurants. Quelle est la probabilité $p_n$ que chaque restaurant reçoive exactement un ami ?

c) Montrez que $p_n \sim C\sqrt{n}\,e^{-n}$ et déterminez la constante $C$.

FORMULE DE STIRLING

## Exercice 23

Léa et Malik lancent chacun une pièce équilibrée $n$ fois.

a) Montrez que la probabilité qu'ils obtiennent le même nombre de piles est $\binom{2n}{n} / 4^n$.

b) À l'aide de la formule de Stirling, montrez que cette probabilité est approximativement $1/\sqrt{\pi n}$.

c) Comparez la valeur exacte et l'approximation pour $n = 8$.

*Indice pour a) : utilisez l'identité $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ de l'exercice 21 d).*

FORMULE DE STIRLING

## Exercice 24 (défi)

Un groupe de 40 étudiants, 20 femmes et 20 hommes, est séparé au hasard en deux sections de 20.

a) Calculez la probabilité que chaque section compte 10 femmes et 10 hommes.

b) Avec la formule obtenue en b) de l'exercice précédent, donnez une approximation de cette probabilité.

c) Comparez l'approximation à la valeur exacte.