# Probabilité conditionnelle et indépendance

Les outils de cette série sont la définition $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$, la règle de multiplication, la loi des probabilités totales, le théorème de Bayes et la notion d'indépendance. Les techniques de dénombrement du module 02 restent utiles pour calculer les probabilités de départ.

**Liens utiles.** Le problème de Monty Hall (exercice 15) et les dérangements, qui reviennent au problème des rencontres (module 02).

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 1

On lance deux dés équilibrés.

a) Sachant que la somme vaut 8, quelle est la probabilité qu'au moins un des dés montre un 6 ?

b) Sachant qu'au moins un des dés montre un 6, quelle est la probabilité que la somme soit supérieure ou égale à 10 ?

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 2

Une famille a trois enfants. On suppose que les huit possibilités (fille ou garçon pour chacun des enfants, de l'aîné au cadet) sont équiprobables.

a) Sachant que la famille a au moins une fille, quelle est la probabilité qu'elle ait au moins deux filles ?

b) Sachant que l'aînée est une fille, quelle est la probabilité que la famille ait au moins deux filles ?

c) Expliquez en une phrase pourquoi les deux réponses diffèrent.

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 3

On pige 3 cartes d'un paquet ordinaire de 52 cartes.

a) Sachant que la main contient au moins un as, quelle est la probabilité qu'elle en contienne au moins deux ?

b) Sachant que la main contient l'as de pique, quelle est la probabilité qu'elle contienne au moins deux as ?

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 4

Soit $A$, $B$ et $C$ des événements avec $\mathbb{P}(C) > 0$.

a) Montrez que $\mathbb{P}(A \mid C) + \mathbb{P}(A^c \mid C) = 1$.

b) Montrez que si $A \subseteq C$, alors $\mathbb{P}(A \mid C) = \mathbb{P}(A)/\mathbb{P}(C)$.

c) Montrez que $\mathbb{P}(A \cup B \mid C) = \mathbb{P}(A \mid C) + \mathbb{P}(B \mid C) - \mathbb{P}(A \cap B \mid C)$.

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 5

On sait que $\mathbb{P}(A) = 0{,}5$, $\mathbb{P}(B) = 0{,}4$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0{,}6$. Calculez

a) $\mathbb{P}(A \cap B)$ ;

b) $\mathbb{P}(A \mid B)$ et $\mathbb{P}(B \mid A)$ ;

c) $\mathbb{P}(A^c \mid B^c)$.

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

## Exercice 6

On lance une pièce équilibrée 10 fois. Sachant qu'on a obtenu exactement 4 piles, calculez la probabilité que

a) le premier lancer ait donné pile ;
b) les deux premiers lancers aient donné pile.

RÈGLE DE MULTIPLICATION

## Exercice 7

Un sac contient 5 jetons rouges et 3 jetons verts. On pige 3 jetons successivement, sans remise.

a) Quelle est la probabilité que les trois jetons soient verts ?

b) Quelle est la probabilité que le premier jeton rouge soit obtenu au troisième tirage ?

c) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement un jeton rouge ?

RÈGLE DE MULTIPLICATION

## Exercice 8

Vous avez noté 7 mots de passe possibles pour un vieux compte, et un seul est le bon. Vous les essayez un à un, au hasard, sans jamais réessayer un mot de passe refusé. Montrez que la probabilité que le compte s'ouvre exactement au $k$-ième essai vaut $1/7$, pour $k = 1, \ldots, 7$.

RÈGLE DE MULTIPLICATION

## Exercice 9

Six amis choisissent chacun, au hasard et indépendamment, l'une des 10 saveurs d'un bar laitier. Calculez, à l'aide de la règle de multiplication, la probabilité que les six saveurs choisies soient toutes différentes.

RÈGLE DE MULTIPLICATION

## Exercice 10

Une urne contient 3 boules blanches et 2 boules noires. On pige une boule, on la remet dans l'urne et on ajoute *deux* boules de la même couleur. On pige ensuite une deuxième boule.

a) Quelle est la probabilité que les deux boules pigées soient blanches ?

b) Quelle est la probabilité que la deuxième boule soit blanche ?

c) Comparez cette probabilité avec la probabilité que la première boule soit blanche.

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 11

Un hôpital achète ses masques chez trois fournisseurs : 45 % viennent du fournisseur $A$, 35 % de $B$ et 20 % de $C$. Les proportions de masques défectueux sont de 1 % chez $A$, 2 % chez $B$ et 4 % chez $C$.

a) Quelle est la probabilité qu'un masque choisi au hasard soit défectueux ?

b) Un masque choisi au hasard est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il provienne de chacun des fournisseurs ?

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 12

Lors d'une compétition, 2 % des athlètes sont dopés. Le test antidopage donne un résultat positif chez 98 % des athlètes dopés et chez 3 % des athlètes qui ne le sont pas.

a) Quelle proportion des athlètes obtient un résultat positif ?

b) Un athlète obtient un résultat positif. Quelle est la probabilité qu'il soit dopé ?

c) L'athlète passe une contre-expertise. On suppose que, *sachant son état (dopé ou non)*, les deux résultats sont indépendants. La contre-expertise est aussi positive. Quelle est maintenant la probabilité qu'il soit dopé ?

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 13

L'urne 1 contient 3 boules rouges et 2 noires ; l'urne 2 contient 1 boule rouge et 4 noires. On lance une pièce équilibrée pour choisir une urne, puis on y pige une boule.

a) Quelle est la probabilité de piger une boule rouge ?

b) La boule pigée est rouge. Quelle est la probabilité qu'elle provienne de l'urne 1 ?

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 14

On reprend les urnes de l'exercice précédent. Cette fois, on pige une boule de l'urne 1 *sans la regarder* et on la place dans l'urne 2. On pige ensuite une boule de l'urne 2.

a) Quelle est la probabilité que cette boule soit rouge ?

b) Elle est rouge. Quelle est la probabilité que la boule transférée ait été rouge ?

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 15

À un jeu télévisé, une voiture est cachée derrière l'une de trois portes et une chèvre derrière chacune des deux autres. Vous choisissez la porte 1. L'animateur, qui sait où est la voiture, ouvre alors une *autre* porte derrière laquelle se trouve une chèvre. S'il a le choix entre deux portes, il en ouvre une au hasard. Il ouvre la porte 3.

a) À l'aide du théorème de Bayes, calculez la probabilité que la voiture soit derrière la porte 2.

b) Avez-vous intérêt à changer de porte ?

On joue maintenant avec 5 portes et une seule voiture. Vous choisissez une porte, puis l'animateur ouvre une autre porte cachant une chèvre.

c) Vous changez pour l'une des trois autres portes encore fermées, choisie au hasard. Quelle est votre probabilité de gagner ?

d) Quelle est votre probabilité de gagner si vous gardez votre porte ?

e) Quelle stratégie est la meilleure ?

*Pour l'origine historique, voir Sources et attributions.*

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 16

À un jeu-questionnaire, chaque question a 5 choix de réponse. Une candidate connaît la réponse à une question avec probabilité 0,7 ; sinon, elle répond au hasard. Elle a bien répondu à une question. Quelle est la probabilité qu'elle ait connu la réponse ?

PROBABILITÉS TOTALES ET THÉORÈME DE BAYES

## Exercice 17

Un sac contient quatre dés : trois dés ordinaires et un dé truqué dont les six faces portent un 6. On choisit un dé au hasard et on le lance deux fois. On obtient deux 6. Quelle est la probabilité d'avoir choisi le dé truqué ?

INDÉPENDANCE

## Exercice 18

On lance deux dés équilibrés. On note $A$ l'événement « le premier dé montre un nombre pair », $B$ l'événement « la somme vaut 7 » et $C$ l'événement « la somme vaut 8 ».

a) Les événements $A$ et $B$ sont-ils indépendants ?

b) Les événements $A$ et $C$ sont-ils indépendants ?

INDÉPENDANCE

## Exercice 19

Soit $A$ et $B$ des événements indépendants avec $\mathbb{P}(A) = 0{,}3$ et $\mathbb{P}(B) = 0{,}5$. Calculez

a) $\mathbb{P}(A \cup B)$ ;

b) la probabilité qu'aucun des deux ne se réalise ;

c) la probabilité qu'exactement un des deux se réalise.

INDÉPENDANCE

## Exercice 20

a) Montrez que si $A$ et $B$ sont incompatibles avec $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $A$ et $B$ ne sont pas indépendants.

b) Montrez qu'un événement $A$ tel que $\mathbb{P}(A) = 0$ ou $\mathbb{P}(A) = 1$ est indépendant de tout événement $B$.

INDÉPENDANCE

## Exercice 21

Un réseau est formé de composantes qui fonctionnent indépendamment les unes des autres, chacune avec probabilité 0,8.

a) Le réseau est formé de la composante 1 *en parallèle* avec une branche qui contient les composantes 2 et 3 *en série*. Il fonctionne si la composante 1 fonctionne ou si les composantes 2 et 3 fonctionnent toutes les deux. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne ?

b) Le réseau est formé de deux blocs placés en série. Chaque bloc contient deux composantes en parallèle : 1 et 2 dans le premier, 3 et 4 dans le second. Quelle est la probabilité qu'il fonctionne ?

INDÉPENDANCE

## Exercice 22

Au XVII$^{e}$ siècle, le chevalier de Méré se demandait lequel de ces deux paris est le plus avantageux :

- obtenir au moins un 6 en 4 lancers d'un dé ;
- obtenir au moins un double 6 en 24 lancers d'une paire de dés.

Calculez les deux probabilités, en supposant les lancers indépendants.

*Pour l'origine historique, voir Sources et attributions.*

INDÉPENDANCE

## Exercice 23

On lance deux dés équilibrés. On note $A$ l'événement « le premier dé donne un nombre pair », $B$ l'événement « le deuxième dé donne un nombre pair » et $C$ l'événement « la somme des deux dés est paire ».

a) Montrez que $A$, $B$ et $C$ sont indépendants deux à deux.

b) Sont-ils indépendants ?

INDÉPENDANCE

## Exercice 24 (défi)

Anne et Bruno lancent à tour de rôle une fléchette vers une cible, en commençant par Anne. Chaque lancer atteint le centre de la cible avec probabilité 1/4, indépendamment des autres. Le premier qui atteint le centre gagne. Quelle est la probabilité qu'Anne gagne ?

*Indice : partitionnez selon le numéro du lancer où le centre est atteint pour la première fois, puis utilisez une série géométrique.*