Fondements

Cette série demande surtout de *justifier* : vérifier qu'une famille est une tribu, déduire une propriété des axiomes, passer à la limite le long d'une suite monotone d'événements. Dans chaque démonstration, indiquez quel axiome ou quelle propriété vous utilisez.

Les sommes de séries géométriques sont utiles : $\sum_{k=0}^{\infty} r^k = \frac{1}{1-r}$ pour $|r| < 1$.

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

TRIBUS

Exercice 1

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$. Lesquelles des familles suivantes sont des tribus sur Ω ? Justifiez.

a) $\{\varnothing, \{1\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$

b) $\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \Omega\}$

c) $\{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \Omega\}$

d) $\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{2, 3, 4\}, \Omega\}$

TRIBUS

Exercice 2

Soit $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$.

a) Déterminez la plus petite tribu contenant les événements $\{1\}$ et $\{2\}$.

b) Combien cette tribu a-t-elle d'éléments ?

TRIBUS

Exercice 3

Soit $\{E_1, \ldots, E_n\}$ une partition d'un ensemble Ω.

a) Montrez que la famille $\mathcal{T}$ de toutes les unions de certains des E_i (y compris l'union vide, $\varnothing$) est une tribu.

b) Combien d'éléments contient-elle ?

TRIBUS

Exercice 4

Soit $\mathcal{T}$ une tribu sur Ω et $A, B \in \mathcal{T}$. Montrez, en n'utilisant que la définition d'une tribu et les propriétés vues en classe, que

a) $A \setminus B \in \mathcal{T}$;

b) $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \in \mathcal{T}$;

c) si $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{T}$, l'ensemble des ω qui appartiennent à *tous les* A_n *sauf peut-être* A_1 est dans $\mathcal{T}$.

TRIBUS

Exercice 5

Soit $\Omega = \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{C}$ la famille des sous-ensembles $A \subseteq \mathbb{N}$ tels que A est fini ou A^c est fini.

a) Montrez que $\mathcal{C}$ contient Ω, est stable par complément et est stable par union de *deux* ensembles.

b) Montrez que $\mathcal{C}$ n'est pas une tribu.

TRIBUS

Exercice 6

Montrez que les ensembles suivants sont des boréliens, en les obtenant à partir d'intervalles par complément, union dénombrable ou intersection dénombrable.

a) $[a, b[$;

b) $]a, +\infty[$;

c) $\mathbb{N}$;

d) $\{1/n : n \in \mathbb{N}^*\}$;

e) $[0{,}3\,;0{,}4[\cup ([0,1] \setminus \mathbb{Q})$, soit les nombres de $[0, 1]$ qui commencent par 0,3 ou qui sont irrationnels.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 7

Soit $\Omega = \{a, b, c\}$ et $\mathcal{T} = \mathcal{P}(\Omega)$. Pour chacune des fonctions suivantes, dites si c'est une mesure de probabilité.

a) $Q_1(A) = |A|/3$.

b) $Q_2(A) = 1$ si $A \neq \varnothing$, et $Q_2(\varnothing) = 0$.

c) $Q_3(A) = 1$ si $a \in A$, et $Q_3(A) = 0$ sinon.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 8

Soit $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{P}_2$ et $\mathbb{P}_3$ trois mesures de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$, et $w_1, w_2, w_3 \geq 0$ des poids tels que $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. Montrez que

$$Q = w_1 \mathbb{P}_1 + w_2 \mathbb{P}_2 + w_3 \mathbb{P}_3$$

est une mesure de probabilité.

Interprétation : on commence par un tirage qui donne i avec probabilité w_i (par exemple, un dé : 1 ou 2 donne $i = 1$, 3 donne $i = 2$, 4, 5 ou 6 donne $i = 3$) ; on réalise ensuite l'expérience décrite par $\mathbb{P}_i$. On parle d'un mélange. L'exemple du feu de circulation (module 05) est de ce type.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 9

Soit $(\Omega, \mathcal{T}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B \in \mathcal{T}$ tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Montrez que $Q(A) = \mathbb{P}(A \mid B)$ définit une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{T})$.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 10

À partir des axiomes de Kolmogorov et de l'additivité finie, démontrez que pour tous $A, B \in \mathcal{T}$:

a) si $A \subseteq B$, alors $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$;

b) $\mathbb{P}(A) \leq 1$;

c) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 11

Soit $\Omega = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$, avec les poids $p(n) = c\,(2/3)^n$.

a) Déterminez la constante c.

b) Calculez $\mathbb{P}(\{n : n \geq k\})$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

c) Calculez la probabilité que le résultat soit pair.

AXIOMES DE KOLMOGOROV

Exercice 12

Peut-on choisir un entier positif « au hasard », de façon que tous les entiers aient la même probabilité ? Plus précisément, montrez qu'il n'existe aucune mesure de probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$ telle que $\mathbb{P}(\{n\})$ soit la même pour tous les n.

CONTINUITÉ DES PROBABILITÉS

Exercice 13

On tire indéfiniment une carte d'un jeu ordinaire de 52 cartes, en la remettant dans le jeu après chaque tirage. Les tirages sont indépendants.

a) À l'aide de la continuité des probabilités, montrez que la probabilité de ne jamais tirer d'as vaut 0.

b) Calculez la probabilité que le premier as apparaisse à un tirage de rang pair.

CONTINUITÉ DES PROBABILITÉS

Exercice 14

On choisit un nombre au hasard dans $[0, 1]$: $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ telle que $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$ pour $0 \leq a \leq b \leq 1$.

a) À l'aide d'une suite croissante d'intervalles fermés, montrez que $\mathbb{P}(]0, \frac{1}{3}]) = \frac{1}{3}$.

b) Soit D l'ensemble des nombres de $[0, 1]$ qui ont un développement décimal fini (comme 0,25 ou 0,375). Montrez que $\mathbb{P}(D) = 0$, en utilisant le fait que $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$ pour tout x.

c) Quelle est la probabilité de choisir un nombre dont le développement décimal est infini ?

CONTINUITÉ DES PROBABILITÉS

Exercice 15

Soit $\mathbb{P}$ une mesure de probabilité quelconque sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$.

a) Montrez que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([n, +\infty[) = 0$.

b) Montrez que $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}([-n, n]) = 1$.

CONTINUITÉ DES PROBABILITÉS

Exercice 16 (défi)

Démontrez l'inégalité de Boole pour une suite infinie d'événements :

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\Big) \le \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k).$$

Indice : posez $B_1 = A_1$ *et* $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_{k-1})$ *pour* $k \ge 2$.