STT-1500 · MODULE 05 · EXERCICES

Probabilités géométriques et densités

Pour un point choisi au hasard dans une région Ω, $\mathbb{P}(A) = \lambda(A)/\lambda(\Omega)$, où λ désigne la longueur, l'aire ou le volume. La première étape consiste presque toujours à **dessiner** Ω et la région A. Pour une densité f, $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$.

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

SUR UNE DROITE

Exercice 1

On choisit un nombre x au hasard dans l'intervalle $]0, 10[$. Calculez la probabilité que

a) $2 \leq x \leq 5$;

b) la partie entière de x soit paire ;

c) x soit à une distance inférieure à 0,1 de l'entier le plus proche.

SUR UNE DROITE

Exercice 2

Un autobus passe à un arrêt toutes les 15 minutes. Vous arrivez à l'arrêt à un moment choisi au hasard, sans consulter l'horaire.

a) Quelle est la probabilité d'attendre moins de 5 minutes ?

b) Vous attendez depuis 3 minutes. Quelle est la probabilité d'attendre encore plus de 5 minutes ?

SUR UNE DROITE

Exercice 3

On casse un bâton de longueur 1 en un point choisi au hasard.

a) Quelle est la probabilité que le morceau le plus court mesure moins de 0,1 ?

b) Quelle est la probabilité que le morceau le plus long mesure au moins le double du plus court ?

SUR UNE DROITE

Exercice 4

On choisit un nombre b au hasard dans $]0, 3[$. Quelle est la probabilité que l'équation $t^2 + bt + 1 = 0$ ait des racines réelles ?

SUR UNE DROITE

Exercice 5

Le polynôme $p(x) = x^3 - 3x + 1$ a exactement deux racines $r_1 < r_2$ dans l'intervalle $]0, 2[$, et il est négatif entre elles. On choisit un nombre au hasard dans $]0, 2[$ et on note A l'événement « le nombre est dans $]r_1, r_2[$ ».

a) Évaluez p en 0,3, 0,4, 1,5 et 1,6.

b) Déduisez-en une minoration et une majoration de $\mathbb{P}(A)$.

DANS LE PLAN

Exercice 6

On choisit un point (x, y) au hasard dans le carré $[0, 1]^2$. Calculez la probabilité que

a) $x + y \leq \frac{1}{2}$;
b) $\max(x, y) \leq \frac{1}{2}$;
c) $y \leq x^2$;
d) le point soit à une distance inférieure à $\frac{1}{2}$ d'au moins un des quatre sommets du carré.

DANS LE PLAN

Exercice 7

Deux amis se donnent rendez-vous entre midi et 13 h. Chacun arrive à un moment choisi au hasard dans cet intervalle, indépendamment de l'autre, et attend l'autre 10 minutes avant de partir. Quelle est la probabilité qu'ils se rencontrent ?

Indice : représentez les deux heures d'arrivée par un point du carré $[0, 60]^2$.

DANS LE PLAN

Exercice 8

On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 1 centré à l'origine. Calculez la probabilité que

a) le point soit à une distance inférieure à $\frac{1}{2}$ du centre ;
b) le point soit dans le carré inscrit dans le disque ;
c) l'abscisse du point soit supérieure à $\frac{1}{2}$.

DANS LE PLAN

Exercice 9

On laisse tomber une rondelle de diamètre d sur un plancher recouvert de tuiles rectangulaires de 20 cm sur 30 cm, avec $d < 20$.

a) Quelle est la probabilité que la rondelle ne touche aucun joint entre les tuiles ?

b) Quel est le plus grand diamètre pour lequel cette probabilité est au moins $1/2$?

DANS LE PLAN

Exercice 10

On choisit deux points au hasard, indépendamment, sur un cercle de rayon 1. Quelle est la probabilité que la corde qui les relie soit plus longue que $\sqrt{3}$, le côté du triangle équilatéral inscrit dans le cercle ?

Indice : quitte à faire une rotation, on peut supposer que le premier point est le point $(1, 0)$. *Le second est alors repéré par un angle* θ *choisi au hasard dans* $[0, 2\pi[$.

DANS LE PLAN

Exercice 11 (défi)

L'aiguille de Buffon. Un plancher est formé de planches de largeur ℓ. On y laisse tomber une aiguille de longueur $L \leq \ell$. On note $x \in [0, \ell/2]$ la distance du milieu de l'aiguille au joint le plus proche et $\theta \in [0, \pi[$ l'angle entre l'aiguille et la direction des joints. On suppose que le point (θ, x) est choisi au hasard dans le rectangle $[0, \pi[\times [0, \ell/2]$.

a) Montrez que l'aiguille croise un joint si et seulement si $x \leq \frac{L}{2} \sin\theta$.

b) Calculez la probabilité que l'aiguille croise un joint.

Pour l'origine historique, voir Sources et attributions.

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 12

Lesquelles des fonctions suivantes sont des densités de probabilité ? Chaque fonction est nulle en dehors de l'intervalle indiqué.

a) $f(x) = 2x$ sur $[0, 1]$;
b) $f(x) = x - \frac{1}{2}$ sur $[0, 2]$;
c) $f(x) = 3$ sur $[0, \frac{1}{3}]$;
d) $f(x) = 1/x$ sur $[1, e]$;
e) $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ sur $\mathbb{R}$.

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 13

Soit $f(x) = c\,(1 - x^2)$ pour $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

a) Déterminez c pour que f soit une densité.

b) Un nombre est choisi selon la densité f. Calculez la probabilité qu'il soit supérieur à $\frac{1}{2}$.

c) Calculez la probabilité qu'il soit dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 14

Soit $f(x) = 1/x^2$ pour $x \geq 1$ et $f(x) = 0$ sinon.

a) Vérifiez que f est une densité.

b) Un nombre X est choisi selon f. Calculez $\mathbb{P}(X > t)$ pour $t \geq 1$.

c) Calculez $\mathbb{P}(X > 4 \mid X > 2)$.

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 15

Le temps d'attente (en minutes) avant qu'un agent réponde à un appel au service à la clientèle est décrit par la densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$ (et 0 sinon), où $\lambda > 0$.

a) Vérifiez que f est une densité.

b) Calculez la probabilité d'attendre plus de t minutes.

c) Avec $\lambda = 0{,}2$, quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ?

d) Montrez que $\mathbb{P}(\text{attente} > s + t \mid \text{attente} > s) = \mathbb{P}(\text{attente} > t)$.

e) Interprétez le résultat de d).

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 16

On choisit un point au hasard dans le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$, et on note X son abscisse.

a) Calculez $\mathbb{P}(X \le t)$ pour $0 \le t \le 1$.

b) Trouvez une densité f telle que $\mathbb{P}(X \le t) = \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x$.

c) L'abscisse est-elle uniforme dans $[0,1]$?

DENSITÉS DE PROBABILITÉ

Exercice 17

Un assureur constate que, pour un contrat donné, il n'y a aucune réclamation dans l'année avec probabilité 0,7. Sinon, le montant réclamé est choisi au hasard dans $]0, 1\,000[$ dollars.

a) Calculez la probabilité que le montant réclamé dans l'année (0 s'il n'y a pas de réclamation) soit d'au plus 200 $.

b) Calculez la probabilité qu'il dépasse 500 $.

c) Expliquez pourquoi cette loi n'est ni discrète ni à densité.