STT-1500 · LABORATOIRE 1

Compter pour calculer des probabilités

Modules 01 et 02 : espace fondamental, complément, union, dénombrement.

Jérôme Soucy · Département de mathématiques et de statistique, Université Laval

Déroulement

- **Durée :** 1 h 30.
- **En équipe de deux.** Discutez de chaque problème avant d'écrire quoi que ce soit : quel est l'espace fondamental Ω ? Les résultats sont-ils équiprobables ? Faut-il tenir compte de l'ordre ?
- **Sans pression.** Le laboratoire n'est pas évalué. L'important est d'expliquer votre raisonnement à votre coéquipière ou coéquipier, et de comprendre le sien.
- Les problèmes vont du plus simple au plus difficile. Les durées sont indicatives : si vous bloquez, passez au suivant et revenez-y.
- Les solutions sont publiées à la fin de la matinée du laboratoire.

Problème 1 — Plaques d'immatriculation (10 min)

Une plaque d'immatriculation est formée de trois lettres (parmi les 26 lettres de l'alphabet) suivies de trois chiffres (de 0 à 9). On suppose que toutes les plaques possibles sont équiprobables.

a) Combien y a-t-il de plaques possibles ?

b) Quelle est la probabilité que les trois lettres soient différentes ?

c) Quelle est la probabilité que les trois chiffres soient en ordre strictement croissant (par exemple 147) ?

d) Quelle est la probabilité que la plaque contienne au moins une voyelle (A, E, I, O, U ou Y) ?

À discuter : pour d), est-il plus simple de compter les plaques avec au moins une voyelle, ou celles qui n'en ont aucune ?

Problème 2 — Deux façons de compter (10 min)

Un tiroir contient 4 chaussettes rouges et 6 chaussettes bleues. On en prend deux au hasard.

Pour les questions a) et b), répartissez-vous le travail : une personne fait a), l'autre fait b), puis comparez.

a) En tenant compte de l'ordre (première chaussette, deuxième chaussette), calculez la probabilité que les deux chaussettes soient de la même couleur.

b) Sans tenir compte de l'ordre (on prend les deux chaussettes en même temps), calculez la même probabilité.

c) Pourquoi obtient-on la même réponse ?

d) Quelle est la probabilité que les deux chaussettes soient de couleurs différentes ?

e) Combien de chaussettes faut-il prendre, au minimum, pour être *certain* d'avoir deux chaussettes de la même couleur ?

Problème 3 — Les anagrammes de LAVAL (15 min)

On écrit au hasard un des arrangements des cinq lettres du mot LAVAL (tous les arrangements distincts sont équiprobables).

a) Combien y a-t-il d'arrangements distincts ?

b) Quelle est la probabilité que le mot commence et finisse par un L ?

c) Quelle est la probabilité que les deux A soient côte à côte ?

d) Quelle est la probabilité que deux lettres identiques ne soient jamais côte à côte ?

Indice pour d) : comptez d'abord les arrangements où les deux L sont côte à côte, puis ceux où les deux A le sont, et utilisez la formule de la probabilité d'une union.

Problème 4 — Le mois de naissance (15 min)

On réunit n personnes. On suppose que chaque personne est née dans l'un des 12 mois, et que les 12^n suites possibles de mois de naissance sont équiprobables.

a) **Avant tout calcul**, chacun écrit son estimation : avec 5 personnes, quelle est la probabilité qu'au moins deux soient nées le même mois ? Comparez vos estimations.

b) Avec $n = 2$, quelle est la probabilité que les deux personnes soient nées le même mois ?

c) Avec $n = 5$, calculez la probabilité qu'au moins deux personnes soient nées le même mois.

d) Quel est le plus petit n pour lequel cette probabilité dépasse $1/2$?

e) Que vaut cette probabilité pour $n = 13$?

Pour le plaisir : avec l'équipe voisine, vérifiez si deux d'entre vous quatre sont nés le même mois.

Problème 5 — Divisible par 2, 3 ou 5 (15 min)

On choisit au hasard un entier N parmi $1, 2, \ldots, 1\,000$. On note D_k l'événement « N est divisible par k ».

a) Calculez $\mathbb{P}(D_2)$.

b) Calculez $\mathbb{P}(D_3)$.

c) Calculez $\mathbb{P}(D_2 \cap D_3)$.

d) Calculez $\mathbb{P}(D_2 \cup D_3)$.

e) À partir d'un diagramme de Venn, justifiez la formule

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

f) Calculez $\mathbb{P}(D_2 \cup D_3 \cup D_5)$.

g) Que donne l'inégalité de Boole pour $\mathbb{P}(D_2 \cup D_3 \cup D_5)$?

À discuter : un entier est divisible par 2 et par 3 si et seulement s'il est divisible par quel nombre ?

Problème 6 — Monter l'escalier (25 min, plus difficile)

Pour monter un escalier de n marches, on fait des pas d'une marche ou des pas de deux marches. Par exemple, pour $n = 3$, il y a trois façons : 1+1+1, 1+2 et 2+1.

a) Énumérez toutes les façons de monter un escalier de 4 marches.

b) Pour un escalier de 10 marches, combien y a-t-il de façons de monter en faisant exactement 3 pas de deux marches ?

c) Pour un escalier de 10 marches, combien y a-t-il de façons de monter en faisant exactement k pas de deux marches, pour $k = 0, 1, \ldots, 5$?

d) Combien y a-t-il de façons, en tout, de monter un escalier de 10 marches ?

e) On choisit au hasard une de ces façons. Quelle est la probabilité qu'elle comporte exactement 3 pas de deux marches ?

f) Notons u_n le nombre de façons de monter n marches. En regardant le premier pas, montrez que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour $n \geq 3$.

g) Vérifiez la réponse de d) à l'aide de la relation de f).

Pour les équipes qui ont terminé : combien y a-t-il de façons de monter 10 marches si on permet aussi des pas de trois marches ?