Introduction aux probabilités discrètes

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Hiver 2025

Résumé

1. Origines
2. Expériences aléatoires et événements
3. Opérations sur les événements
4. Probabilités sur un espace discret
5. Propriétés fondamentales des probabilités
6. Au-delà du cas discret

1

Origines

Le problème de Galilée

On a observé que bien que 9 et 10 puissent être obtenus comme totaux de trois dés de 6 manières différentes, la somme de 9 est obtenue moins souvent que la somme de 10. Pourquoi ?

Somme de 9	$6+2+1$	$5+3+1$	$5+2+2$	$4+4+1$	$4+3+2$	$3+3+3$
Somme de 10	$6+3+1$	$6+2+2$	$5+4+1$	$5+3+2$	$4+4+2$	$4+3+3$

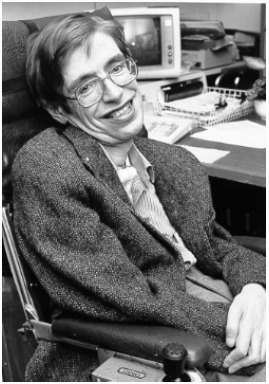
Pour la première fois, l'expérience du hasard fait appel à la théorie pour obtenir des explications. [1]

Hasard ?

Galilée est mort le 8 janvier 1642, année de naissance de Newton. Trois cents ans plus tard — jour pour jour —, Stephen Hawking naissait.



Galilée (1564-1642)



Stephen Hawking (1942-2018)

Le problème des partis

Le chevalier de Méré, de son vrai nom Antoine Gombaud (1607-1684), tint une correspondance avec Blaise Pascal (1623-1662) sur un problème lié à la répartition des gains (ou pertes) lorsqu'un jeu de hasard est interrompu.

> Deux joueurs jouent à un jeu de hasard. Ils ont chacun misé un montant m au départ. Celui qui remportera la cagnotte (dont le montant est $2m$) sera celui à avoir gagné le premier 3 parties (pas nécessairement consécutives). Or il se trouve que le jeu est interrompu avant que l'un des deux joueurs ait obtenu 3 victoires. Comment, dans ces circonstances, doit-on partager les enjeux ?

L'été 1654



Blaise Pascal (1623-1662)



Pierre de Fermat (1607-1665)

2

Expériences aléatoires et événements

Expérience aléatoire

Définition. Une **expérience aléatoire** est une expérience satisfaisant les caractéristiques suivantes :

1. elle peut être répétée un grand nombre de fois ;
2. dans des conditions identiques ;
3. on ne doit pas pouvoir prédire avec exactitude son résultat.

Remarque. La troisième condition est équivalente à affirmer que des résultats différents peuvent être observés même si les conditions 1 et 2 sont satisfaites.

L'espace fondamental ou l'univers des possibles

Définition. Le résultat d'une expérience aléatoire s'appelle un **événement élémentaire** ou encore une **éventualité**.

Définition. L'ensemble dont les éléments sont les événements élémentaires d'une expérience aléatoire s'appelle l'**espace fondamental** ou encore l'**univers des possibles**.

Notation

Remarque. Étant donnée une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, un événement élémentaire type s'écrit souvent à l'aide de la lettre grecque omega minuscule ω. Son espace fondamental est généralement représenté à l'aide de la lettre grecque omega majuscule Ω.

Exemple : Lancer d'une pièce de monnaie

Lorsqu'on lance une pièce de monnaie, *pile* et *face* sont les événements élémentaires. On peut les noter simplement par les lettres P et F. Ainsi, $\{P, F\}$ constitue l'espace fondamental. On peut aussi convenir de noter *pile* par un 0 et *face* par un 1, auquel cas l'espace fondamental serait donné par $\{0, 1\}$.

> Utiliser des nombres ou des couples de nombres est une bonne pratique pour décrire les éventualités d'une expérience aléatoire. L'utilisation de lettres est aussi appropriée. L'important est de pouvoir facilement comprendre le symbolisme associé à tous les événements élémentaires de l'espace fondamental.

Les événements en probabilités

Considérons une expérience aléatoire d'espace fondamental Ω. On s'intéresse au cas où le résultat de l'expérience aléatoire figure dans un sous-ensemble déterminé a priori.

> **Définition.** Soit Ω l'espace fondamental d'une expérience aléatoire. Un sous-ensemble de Ω est alors appelé un **événement**.

Les événements en probabilités (suite)

Définitions. Soit Ω l'espace fondamental d'une expérience aléatoire. Soit A un sous-ensemble de Ω.

- Si $A \neq \emptyset$, on dira que A est un **événement possible**.
- Dans le cas contraire, on dira que A est un **événement impossible**.
- Si $A = \Omega$, on dira que A est un **événement certain**.

Exemple : Trois lancers d'une pièce de monnaie

On lance une pièce de monnaie 3 fois. On représente *pile* par P et *face* par F. Décrivez Ω.

On définit les événements suivants :

$A =$ Le nombre d'occurrences de pile est strictement supérieur au nombre d'occurrences de face ;

$B =$ Le nombre d'occurrences de face est strictement supérieur au nombre d'occurrences de pile ;

$C =$ Le nombre d'occurrences de pile est égal au nombre d'occurrences de face.

Décrivez les éventualités appartenant à chacun de ces événements.

3

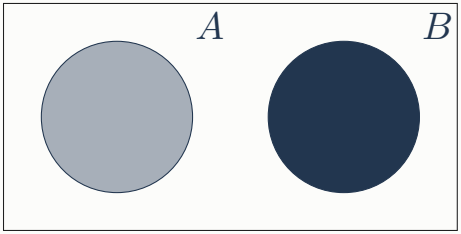
Opérations sur les événements

Pourquoi des opérations sur les événements ?

- Les événements sont des ensembles (sous-ensembles de Ω).
- On doit pouvoir combiner des événements pour en créer de nouveaux.
- Les opérations ensemblistes (union, intersection, complémentaire) ont une interprétation probabiliste naturelle.

Événements mutuellement exclusifs (incompatibles)

Voici une représentation où les ensembles A et B (sous-ensembles d'un ensemble Ω) sont disjoints, c'est-à-dire qu'ils ne partagent aucun élément.

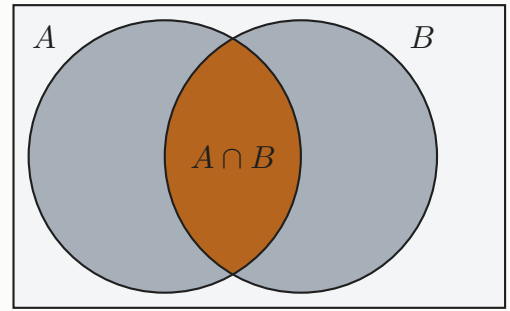


Ω

$$A \cap B = \emptyset$$

En termes probabilistes, on peut voir A et B comme des événements pouvant être définis dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ dont l'espace fondamental est Ω. Si les ensemble A et B sont disjoints, on dit que A et B sont des **événements mutuellement exclusifs** ou encore **incompatibles**.

Intersection de deux ensembles



En termes probabilistes, Si A et B sont des événements pouvant être définis dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'**intersection** de A et B correspond à l'événement dont les éventualités appartiennent à A **et** à B. Si cette intersection est non-vide, on dit que A et B sont **compatibles**.

Exemple : Trois lancers et l'incompatibilité

On lance une pièce de monnaie 3 fois. Nous avons vu que Ω correspond à

$$\{(P,P,P),(P,P,F),(P,F,P),(F,P,P),\\ (F,F,P),(F,P,F),(P,F,F),(F,F,F)\}.$$

On définit les événements suivants :

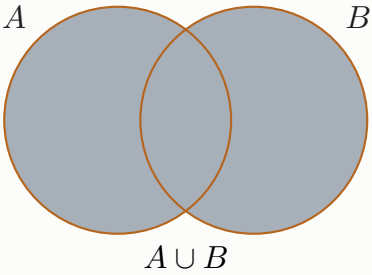
$A =$ Le nombre d'occurrences de pile est strictement supérieur au nombre d'occurrences de face ;

$B =$ Le nombre d'occurrences de face est strictement supérieur au nombre d'occurrences de pile ;

$D =$ Le nombre d'occurrences de pile est de 2.

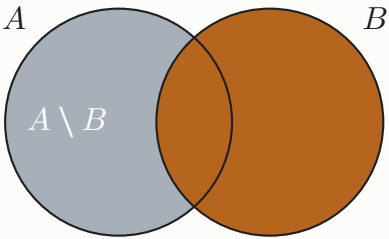
Parmi ces événements, identifiez les paires d'événements incompatibles et les paires d'événements compatibles.

Union de deux ensembles



En termes probabilistes, Si A et B sont des événements pouvant être définis dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'**union** de A et B correspond à l'événement dont les éventualités appartiennent à A **ou** à B.

La différence de deux ensembles



En termes probabilistes, Si A et B sont des événements pouvant être définis dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, la **différence** de A et B correspond à l'événement dont les éventualités appartiennent à A **mais pas** à B.

La différence de A et B n'est pas la même chose que la différence de B et A. Dans le premier cas, elle correspond à l'ensemble $A \setminus B$ alors que dans le second elle correspond à l'ensemble $B \setminus A$.

L'événement complémentaire

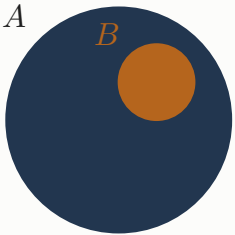


$$A^c = \Omega \setminus A$$

En termes probabilistes, Si A est un événement pouvant être défini dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, l'**événement complémentaire** de A correspond à l'ensemble des événements élémentaires de l'espace fondamental qui ne correspondent pas à une réalisation de A. On le note A^c. On dira aussi que A et A^c sont complémentaires.

Avec cette notion, on peut observer que $A \setminus B = A \cap B^c$.

Sous-ensembles



$B \subseteq A$

En termes probabilistes, Si A et B sont des événements pouvant être définis dans le contexte d'une expérience aléatoire $\mathcal{E}$, affirmer que la réalisation de B implique la réalisation de A signifie que $B \subseteq A$.

Récapitulatif des opérations ensemblistes

Opération	Notation	Interprétation probabiliste
Intersection	$A \cap B$	A **et** B se réalisent
Union	$A \cup B$	A **ou** B se réalise
Différence	$A \setminus B$	A se réalise **mais pas** B
Complémentaire	A^{c}	A **ne se réalise pas**
Inclusion	$B \subseteq A$	Si B se réalise, alors A aussi
Disjoints	$A \cap B = \emptyset$	A et B sont incompatibles

Relations utiles : $A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$, $A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}} = (A \cup B)^{\mathsf{c}}$ et ${}^{\mathsf{c}}A \cap B = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}$

Exemple : Trois lancers — suite

$A =$ Le nombre d'occurrences de pile est strictement supérieur au nombre d'occurrences de face ;

$B =$ Le nombre d'occurrences de face est strictement supérieur au nombre d'occurrences de pile ;

$E =$ Le nombre d'occurrences de pile est ≥ 1.

1. Parmi les événements A, B et E, pouvez-vous en trouver qui sont complémentaires ?
2. Est-ce qu'un de ces événements se réalise dès qu'un autre se réalise ?
3. Est-ce que $B \setminus E = B$?
4. Est-ce que $A \setminus E = A$?

4

Probabilités sur un espace discret

Espace fondamental discret

Définition. On dit que l'espace fondamental Ω d'une expérience aléatoire est **discret** s'il est fini ou infini dénombrable, c'est-à-dire si on peut énumérer ses éléments sous la forme

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\} \qquad \text{ou} \qquad \Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}.$$

Exemples. Lancer un dé : $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$ est fini. Lancer une pièce jusqu'à l'obtention de pile et noter le nombre de lancers : $\Omega = \mathbb{N}^\star$ est infini dénombrable.



Dans ce module, tous les espaces fondamentaux sont discrets.

Une loi de probabilité sur un espace discret

Définition. Soit Ω un espace fondamental discret. Une **loi de probabilité** sur Ω est la donnée, pour chaque éventualité $\omega \in \Omega$, d'un nombre $p(\omega)$, appelé le **poids** de ω, tel que

1. $p(\omega) \geq 0$ pour tout $\omega \in \Omega$;
2. $\displaystyle\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1$.

La **probabilité** d'un événement $A \subseteq \Omega$ est alors définie par

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p(\omega).$$

Remarques sur la définition

Remarques.

- En particulier, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p(\omega)$: le poids d'une éventualité est la probabilité de l'événement élémentaire correspondant.
- Comme les termes sont positifs, l'ordre dans lequel on fait la somme n'a pas d'importance, même lorsque A est infini.
- Choisir une loi de probabilité, c'est *modéliser* l'expérience : le cadre mathématique ne dit pas quels poids sont les bons, seulement quelles règles ils doivent respecter.

Exemple : Un dé truqué

Un dé est truqué de sorte que la face 6 sort une fois sur deux et que les autres faces sont équiprobables.

ω	1	2	3	4	5	6
$p(\omega)$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$

Vérifiez qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité. Calculez ensuite la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Réponse : $\mathbb{P}(\{2,4,6\}) = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{7}{10}$.

Premières propriétés

Proposition. Soit p une loi de probabilité sur un espace fondamental discret Ω. Alors

1. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ et $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$ pour tout événement A ;
2. **(Additivité)** si A et B sont incompatibles, alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Pour l'additivité : chaque éventualité de $A \cup B$ appartient à un seul des deux événements. Ainsi

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \sum_{\omega \in A \cup B} p(\omega) = \sum_{\omega \in A} p(\omega) + \sum_{\omega \in B} p(\omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Additivité pour une famille d'événements

Proposition. Soit $A_1, A_2, \ldots$ des événements deux à deux incompatibles d'un espace fondamental discret. Alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$$

(et de même pour une famille finie).

On regroupe les poids selon l'unique A_k contenant chaque éventualité.

Ces règles deviendront les axiomes de Kolmogorov (module *Fondements*).

Le cas équiprobable où $\operatorname{Card}\Omega < \infty$

Proposition. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ l'espace fondamental d'une expérience aléatoire où les éventualités sont équiprobables. Alors

$$p(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{n} \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Soit p la valeur commune des poids $p(\omega_i)$. Puisque la somme des poids vaut 1,

$$1 = \sum_{k=1}^{n} p(\omega_k) = \sum_{k=1}^{n} p = n \cdot p, \qquad \text{d'où} \qquad p = \frac{1}{n}.$$

Le cas équiprobable où $\operatorname{Card}\Omega < \infty$ — suite

Proposition. Soit une expérience aléatoire $\mathcal{E}$ d'espace fondamental fini Ω dont les éventualités sont équiprobables. Alors, pour tout événement A,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \frac{1}{\operatorname{Card}\Omega} = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card}\Omega}.$$

Calculer une probabilité revient alors à *compter* : c'est l'objet du module sur le dénombrement.

Remarque. Un espace infini dénombrable ne peut pas être équiprobable : la somme $\sum_{k=1}^{\infty} p$ vaut 0 ou ∞, jamais 1.

Exemple : Retour sur le problème de Galilée

Somme de 9	$6+2+1$	$5+3+1$	$5+2+2$	$4+4+1$	$4+3+2$	$3+3+3$
Somme de 10	$6+3+1$	$6+2+2$	$5+4+1$	$5+3+2$	$4+4+2$	$4+3+3$

Calculez la probabilité de réalisation de chacun des ces événements.

Exemple : Retour sur le problème des partis

Deux joueurs jouent à un jeu de hasard. Ils ont chacun misé un montant m au départ. Celui qui remportera la cagnotte (dont le montant est $2m$) sera celui à avoir gagné le premier 3 parties (pas nécessairement consécutives). Or il se trouve que le jeu est interrompu après que le joueur 1 ait gagné une partie et le joueur 2 aucune.

Si le jeu s'était poursuivi, quelle aurait été la probabilité de gain pour chacun des joueurs ?

Exemple : Solution du problème des partis

Le joueur 1 a besoin de 2 victoires supplémentaires, le joueur 2 en a besoin de 3.

Séquence	Gagnant
J1-J1-?-?	Joueur 1
J1-J2-J1-?	Joueur 1
J1-J2-J2-J1	Joueur 1
J1-J2-J2-J2	Joueur 2
J2-J1-J1-?	Joueur 1
J2-J1-J2-J1	Joueur 1
J2-J1-J2-J2	Joueur 2
J2-J2-J1-J1	Joueur 1
J2-J2-J1-J2	Joueur 2
J2-J2-J2-?	Joueur 2

Légende : J1 = Joueur 1 gagne, J2 = Joueur 2 gagne.

En comptant tous les cas équiprobables ($2^4 = 16$ séquences possibles), on trouve :

$$\mathbb{P}(\text{Joueur 1 gagne}) = \frac{11}{16},$$
$$\mathbb{P}(\text{Joueur 2 gagne}) = \frac{5}{16}.$$

Cas où Ω est (infini) dénombrable

On s'intéresse au rang de la première apparition de pile lorsqu'on joue à pile ou face. On constate que

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\},$$

où ω_i désigne l'événement élémentaire : *La première apparition de pile s'est produite au* $i^{ième}$ *lancer.* On constate que

$$p(\omega_i) = \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = \frac{1}{2^i} \qquad \forall i \in \mathbb{N}^\star\,.$$

On vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité :

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(\omega_k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + ... = 1.$$

Exemple : Pile à un lancer pair

Avec l'expérience précédente, quelle est la probabilité que la première apparition de pile se produise à un lancer pair ?

Réponse : $\mathbb{P}(\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, ...\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3}.$

5

Propriétés fondamentales des probabilités

La complémentarité

Parfois, le calcul direct de la probabilité d'un événement A est plus complexe que que le calcul de la probabilité de réalisation de son complémentaire.

Proposition. Pour tout événement A, nous avons que

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}}).$$

Exemple. Calculez la probabilité d'obtenir au moins une fois pile parmi 5 lancers.

Pas si improbable que ça

Mario Lemieux et Patrick Roy sont sans conteste deux des grands joueurs de hockey sur glace de leur époque. Ils sont tous les deux nés le 5 octobre 1965.



Mario Lemieux



Patrick Roy

Exemple : Quantifier l'improbable

Soit E l'événement *Les 20 meilleurs joueurs de la LNH nés dans les années 60 sont tous nés des journées différentes*. Notons qu'il y a eu $3 \times 366 + 7 \times 365 = 3653$ journées durant cette période. Décrire Ω se fait de la manière suivante : c'est un vecteur à 20 composantes choisies parmi les journées des années 1960. On peut les étiqueter de 1 à 3653. La cardinalité de Ω est donc 3653^{20}. Un événement élémentaire appartenant à E est un vecteur dont toutes les composantes sont distinctes. On peut les énumérer de la manière suivante : il y a 3653 possibilités pour la première composante, 3652 pour la seconde, etc, jusqu'à 3634 pour la dernière. Ainsi,

$$\mathbb{P}(E) = \frac{3653 \times 3652 \times \cdots \times 3634}{3653^{20}} \approx 0{,}949 = 94{,}9\,\%.$$

Finalement, en utilisant la propriété de complémentarité des probabilités, la probabilités qu'au moins deux joueurs parmi les 20 meilleurs nés dans les années 60 soient nés la même journée est d'environ $5{,}1\,\%$.

Exemple : Ne tirez pas trop vite vos conclusions

Soit F l'événement *Les* 100 *meilleurs joueurs de la LNH nés dans les années* 50*,* 60*,* 70*,* 80 *ou* 90 *sont tous nés des journées différentes*. Notons qu'il y a eu $12 \times 366 + 38 \times 365 = 18\,263$ journées durant cette période. Le raisonnement précédent nous permet de trouver que

$$\mathbb{P}(F) = \frac{18\,263 \times 18\,262 \times \cdots \times 18\,164}{18\,263^{100}} \approx 0{,}762 = 76{,}2\,\%.$$

La probabilités qu'au moins deux joueurs parmi les 100 meilleurs nés dans les années 50, 60, 70, 80 ou 90 soient nés la même journée est d'environ $23{,}8\,\%$.

La probabilité d'une union

Propositions. **Pour deux événements :**
Soit A et B deux événements. Alors

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Pour trois événements :
Soit A, B et C trois événements. Alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) \\ - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) \\ + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).\end{aligned}$$

Exemple : Tirer une carte

On tire une carte d'un jeu standard de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer un roi ou un cœur ?

La monotonicité

Proposition. Soit A et B deux événements tels que $A \subseteq B$. Alors

$$\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B).$$

On peut écrire $B = A \cup (B \cap A^{\mathsf{c}})$. Les événements A et $B \cap A^{\mathsf{c}}$ étant incompatibles, on en déduit que

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \cap A^{\mathsf{c}}).$$

De là on observe que $\mathbb{P}(B \cap A^{\mathsf{c}}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$. Comme la probabilité de réalisation de tout événement est ≥ 0, il suit que

$$0 \leq \mathbb{P}(B \cap A^{\mathsf{c}}) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A).$$

Le résultat est finalement déduit de l'inégalité $0 \leq \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.

Inégalité de Boole

Proposition. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements. Alors

$$\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{n} A_k) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k).$$

Considérons deux événements A et B. Nous savons que

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

On en déduit que $\mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$. Cette inégalité est utilisée pour majorer la probabilité de réalisation d'une union d'événements peu probables. Elle est aussi valable dans le cas où on a une famille dénombrable d'événements.

Exemple : Majorer avec Boole

On lance 3 dés. Majorez la probabilité d'obtenir au moins un 6.

Inégalité de Bonferroni

Proposition. Soit $A_1, A_2, \dots, A_n$ des événements. Alors

$$\mathbb{P}(\cap_{k=1}^{n} A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(A_k{}^{\mathsf{c}}\right).$$

Considérons deux événements A et B. On constate que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 1 - \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}).$$

D'après l'inégalité de Boole, $\mathbb{P}(A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}}) \leq \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}}) + \mathbb{P}(B^{\mathsf{c}})$.On en déduit que

$$\mathbb{P}(A \cap B) \geq 1 - \mathbb{P}(A^{\mathsf{c}}) - \mathbb{P}(B^{\mathsf{c}}).$$

Cette inégalité est utilisée pour minorer la probabilité de réalisation d'une intersection d'événements probables. Elle est aussi valable dans le cas où on a une famille dénombrable d'événements.

Exemple : Minorer avec Bonferroni

Minorez la probabilité que 3 lancers de dés ne donne jamais de 6.

6

Au-delà du cas discret

Les limites de l'approche par les poids

On choisit un nombre réel *au hasard* dans $\Omega = [0, 1]$, qui n'est pas dénombrable.

- Tous les nombres devraient avoir le même poids p.
- Si $p > 0$, $n > 1/p$ nombres distincts formeraient un événement de probabilité $n \cdot p > 1$. Il faut donc que $p = 0$.
- Mais alors « la somme » des poids de tous les éléments de Ω ne peut pas valoir 1.

Il faut plutôt définir directement $\mathbb{P}(A)$ pour certains événements A, par exemple $\mathbb{P}([a, b]) = b - a$. C'est le rôle des axiomes de Kolmogorov (module *Fondements des probabilités*).

Bibliographie

[1] P. Picard. *Hasard et probabilités*. Paris : Vuibert, 2007.

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.
- Les diagrammes de Venn ont été réalisés en utilisant TikZ (un paquet de LaTeX).
- Les images de personnes proviennent de Wikipédia.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.