Combinatoire énumérative

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Hiver 2025

Résumé

1. Principe fondamental du dénombrement
2. Permutations et k-permutations
3. Combinaisons
4. Les coefficients multinomiaux
5. La formule de Stirling

1

Principe fondamental du dénombrement

Exemple : Plaques d'immatriculation

Combien de plaques d'immatriculation différentes de la forme `LLL CCC` existent-t-il ? Ici, `L` est une des lettres de l'alphabet et `C` un chiffre (en base dix).

Exemple : Plaques d'immatriculation

Combien de plaques d'immatriculation différentes de la forme `LLL CCC` existent-t-il ? Ici, `L` est une des lettres de l'alphabet et `C` un chiffre (en base dix).

Combien de plaques d'immatriculation différentes de la forme `LLL CCC` utilisent des symboles différents ?

Exemple : Boules et urnes

De combien de façons différentes pouvons-nous placer N boules distinguables dans r urnes distinguables ?

Exemple : Principe d'inclusion/exclusion

On place N boules distinguables dans 3 urnes distinguables. Quelle est la probabilité qu'aucune urne ne soit vide ?

Description de la procédure énumérative

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*.

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

- Il y a n_1 façon de réaliser la tâche t_1 ;

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

- Il y a n_1 façon de réaliser la tâche t_1 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_1, il y a n_2 façons de réaliser t_2 ;

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

- Il y a n_1 façon de réaliser la tâche t_1 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_1, il y a n_2 façons de réaliser t_2 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_2 et t_1, il y a n_3 façons de réaliser t_3 ;

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

- Il y a n_1 façon de réaliser la tâche t_1 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_1, il y a n_2 façons de réaliser t_2 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_2 et t_1, il y a n_3 façons de réaliser t_3 ;
- ...

Description de la procédure énumérative

Considérons une procédure pouvant être décomposée en k tâches à réaliser, *dans un ordre déterminé*. On pourrait donc identifier cette procédure à un vecteur $(t_1, t_2, \dots, t_k)$.Faisons maintenant les hypothèses suivantes sur les t_i.

- Il y a n_1 façon de réaliser la tâche t_1 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_1, il y a n_2 façons de réaliser t_2 ;
- Peu importe la façon choisie pour réaliser t_2 et t_1, il y a n_3 façons de réaliser t_3 ;
- ...
- Peu importe la façon choisie pour réaliser $t_{k-1}, t_{k-2}, \dots t_2$ et t_1, il y a n_k façons de réaliser t_k.

Conséquence

Conséquence

Proposition. Si une procédure réalisée selon les conventions de l'acétate précédente comprend les étapes $t_1, t_2, \dots, t_k$ et que l'étape t_i peut être réalisée de n_i façons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, alors il y a $\prod_{i=1}^{k} n_i$ façons de réaliser la procédure.

Conséquence

Proposition. Si une procédure réalisée selon les conventions de l'acétate précédente comprend les étapes $t_1, t_2, \dots, t_k$ et que l'étape t_i peut être réalisée de n_i façons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, alors il y a $\prod_{i=1}^{k} n_i$ façons de réaliser la procédure.

Ce principe est équivalent à affirmer que si nous prenons le produit cartésien d'ensembles finis, alors la cardinalité de l'ensemble ainsi formé correspond au produit des cardinalités des ensembles apparaissant dans le produit cartésien.

Conséquence

Proposition. Si une procédure réalisée selon les conventions de l'acétate précédente comprend les étapes $t_1, t_2, \dots, t_k$ et que l'étape t_i peut être réalisée de n_i façons pour tout $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, alors il y a $\prod_{i=1}^{k} n_i$ façons de réaliser la procédure.

Ce principe est équivalent à affirmer que si nous prenons le produit cartésien d'ensembles finis, alors la cardinalité de l'ensemble ainsi formé correspond au produit des cardinalités des ensembles apparaissant dans le produit cartésien. Plus formellement, si $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des ensembles finis, alors

$$\operatorname{Card} E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n = \prod_{i=1}^{n} \operatorname{Card} E_i.$$

2

Permutations et k-permutations

k-permutations

k-permutations

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Une **k-permutation** de E est un k-uplet d'éléments de E dont toutes les composantes sont distinctes.

k-permutations

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Une **k-permutation** de E est un k-uplet d'éléments de E dont toutes les composantes sont distinctes.

Proposition. Si $P_{n,k}$ désigne le nombre de k-permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

k-permutations

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Une **k-permutation** de E est un k-uplet d'éléments de E dont toutes les composantes sont distinctes.

Proposition. Si $P_{n,k}$ désigne le nombre de k-permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$, alors

$$P_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Une k-permutation d'éléments provenant d'un ensemble de cardinalité n s'appelle aussi une permutation de n objets pris k à la fois.

Proposition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Le nombre de k-permutations de E correspond au nombre de fonctions injectives de $\{1, 2, \dots, k\}$ dans E.

Proposition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Le nombre de k-permutations de E correspond au nombre de fonctions injectives de $\{1, 2, \dots, k\}$ dans E.

Rappelons qu'une fonction $f : A \to B$ est injective si

$$f(x) = f(y) \Rightarrow x = y.$$

C'est donc dire qu'une fonction injective est telle qu'elle ne prend jamais deux fois la même valeur. La contraposée (un équivalent logique) de l'énoncé précédent est

$$x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y).$$

Permutations

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Une **permutation** de E est une n-permutation d'éléments de E.

Permutations

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n. Une **permutation** de E est une n-permutation d'éléments de E.

Proposition. Il y a $n!$ permutations de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$.

Remarques

Remarques.

- Le nombre de permutations d'un ensemble fini E correspond au nombre de fonctions bijectives de E dans E.
- L'ensemble des permutations muni de la loi de composition possède une structure de groupe. Cette structure algébrique est étudiée dans le cours *MAT-2300 : Algèbre I*.

Exemple : Les téléphones

Albert, Bernard et Chantal déposent leur téléphone dans une boîte. Ensuite, chacun pige un téléphone (sans remise). Quelle est la probabilité qu'au moins une de ces personnes ait pigé son propre téléphone ?

Point fixe d’une permutation

Point fixe d'une permutation

Définition. Soit X un ensemble fini. Un **point fixe pour une permutation** $S : X \to X$ est un élément $x \in X$ tel que $S(x) = x$.

Point fixe d'une permutation

Définition. Soit X un ensemble fini. Un **point fixe pour une permutation** $S : X \to X$ est un élément $x \in X$ tel que $S(x) = x$.

La permutation σ sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ possède A et D comme point fixe.

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A & C & B & D \end{pmatrix}$$

La permutation σ_1 ci-haut envoie A sur A, B sur C, C sur B, et D sur D.

Dérangement

Définition. Soit X un ensemble fini. Un **dérangement** d'un ensemble X est une permutation de X qui ne possède aucun point fixe.

Dérangement

Définition. Soit X un ensemble fini. Un **dérangement** d'un ensemble X est une permutation de X qui ne possède aucun point fixe.

La permutation σ_2 sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est un dérangement.

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

Dérangement

Définition. Soit X un ensemble fini. Un **dérangement** d'un ensemble X est une permutation de X qui ne possède aucun point fixe.

La permutation σ_2 sur l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ est un dérangement.

$$\sigma_2 = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ B & C & D & A \end{pmatrix}$$

Remarque. Dans le problème des téléphones d'Albert, Bernard et Chantal, il fallait trouver le nombre de permutations sur un ensemble à trois éléments qui ne sont pas des dérangements.

Exemple : Dans un contexte statistique

On place 6 boules dans 6 urnes numérotées. Chaque urne ne peut contenir qu'une seule boule. On numérote les boules de 1 à 6. On place les boules au hasard dans les urnes. Quelle est la probabilité qu'aucune boule ne se retrouve dans l'urne ayant le numéro correspondant ?

La formule des dérangements

La formule des dérangements

Théorème. Soit D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

La formule des dérangements

Théorème. Soit D_n le nombre de dérangements de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$. Alors

$$D_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$



On peut montrer que cette quantité est très proche de $\frac{n!}{e}$.

Application

Application

Exemple. Retournons à notre problème de placement de boules dans des urnes. On veut savoir $\frac{D_6}{6!}$. On calcule :

$$\begin{aligned}\frac{D_6}{6!} &= \sum_{k=0}^{6} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{1}{1} - \frac{1}{1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{24} - \frac{1}{120} + \frac{1}{720} \\ &= \frac{53}{144} \approx 0{,}368\,06.\end{aligned}$$

3

Combinaisons

Définitions

Définitions

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n et soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Une **$k$-combinaison** de E (ou encore une **combinaison de k éléments de E**) est un sous-ensemble de E dont la cardinalité est k.

Définitions

Définition. Soit E un ensemble fini de cardinalité n et soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Une **$k$-combinaison** de E (ou encore une **combinaison de k éléments de E**) est un sous-ensemble de E dont la cardinalité est k.

Définition. Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. On appelle **coefficient binomial** le nombre de k-combinaisons d'un ensemble de cardinal n. On utilise la notation $\binom{n}{k}$. En France, on utilise parfois C_n^k

Propriétés

Propriétés

Propositions. **Formule explicite :**
Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Propriétés

Propositions. **Formule explicite :**
Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Symétrie :
Soit n et k des entiers naturels tels que $0 \leq k \leq n$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Exemple

Exemple

Exemple. De combien de manières différentes pouvons-nous former une main de 5 cartes à partir d'un jeu standard de 52 cartes ?

Exemple

Exemple. De combien de manières différentes pouvons-nous former une main de 5 cartes à partir d'un jeu standard de 52 cartes ?

Réponse : $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$

Quelques exemples — suite

Quelques exemples — suite

Exemples. Au poker, une quinte flush royale correspond à la main d'un joueur comprenant les 5 cartes suivantes : 10, valet, dame, roi et as, toutes de la même couleur. Il y en a donc 4 : en cœur, en carreau, en pique et en trèfle.

Quelques exemples — suite

Exemples. Au poker, une quinte flush royale correspond à la main d'un joueur comprenant les 5 cartes suivantes : 10, valet, dame, roi et as, toutes de la même couleur. Il y en a donc 4 : en cœur, en carreau, en pique et en trèfle.

Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte flush royale au premier tour d'une partie de poker ?

Quelques exemples — suite

Exemples. Au poker, une quinte flush royale correspond à la main d'un joueur comprenant les 5 cartes suivantes : 10, valet, dame, roi et as, toutes de la même couleur. Il y en a donc 4 : en cœur, en carreau, en pique et en trèfle.

Quelle est la probabilité d'obtenir une quinte flush royale au premier tour d'une partie de poker ?

$$\frac{4}{\binom{52}{5}} = \frac{4}{2\,598\,960} \approx 1{,}539\,077\,169\,329\,270\,3 \times 10^{-6}.$$

Binôme de Newton

Binôme de Newton

Exemple. Combien de termes $x^k y^{n-k}$ obtiendra-t-on lorsqu'on développe le produit $(x+y)^n$?

Binôme de Newton

Exemple. Combien de termes $x^k y^{n-k}$ obtiendra-t-on lorsqu'on développe le produit $(x+y)^n$?

Réponse : $\binom{n}{k}$

Exploration

Exploration

Observons ceci :

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4.$$

Exploration

Observons ceci :

$$(x+y)^4 = \binom{4}{0}x^4 + \binom{4}{1}x^3y + \binom{4}{2}x^2y^2 + \binom{4}{3}xy^3 + \binom{4}{4}y^4.$$

Explication : $(x+y)^4 = (x+y)(x+y)(x+y)(x+y)$. Pour déterminer le coefficient de x^3y par exemple, il nous faut évaluer le nombre de termes x^3y obtenus dans le produit. Il y en a autant qu'il y a de manières de choisir un y dans les 4 facteurs présents. Ce nombre est $\binom{4}{1}$.

Exploration — suite

Observons ceci :

$$(2x+3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y) + \binom{4}{2}(2x)^2(3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)(3y)^3 + \binom{4}{4}(3y)^4$$

Exploration — suite

Observons ceci :

$$(2x+3y)^4 = \binom{4}{0}(2x)^4 + \binom{4}{1}(2x)^3(3y) + \binom{4}{2}(2x)^2(3y)^2 + \binom{4}{3}(2x)(3y)^3 + \binom{4}{4}(3y)^4$$

Pour déterminer le coefficient de x^3y par exemple, il nous faut évaluer le produit $\binom{4}{1} \cdot 2^3 \cdot 3$. Celui-ci correspond à 96.

Formule du binôme de Newton

Formule du binôme de Newton

Théorème. Soit x et y deux nombres réels et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Formule du binôme de Newton

Théorème. Soit x et y deux nombres réels et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ce théorème a plusieurs conséquences, dont celle-ci : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Formule du binôme de Newton

Théorème. Soit x et y deux nombres réels et soit $n \in \mathbb{N}$. Alors

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Ce théorème a plusieurs conséquences, dont celle-ci : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$. On peut en donner une démonstration purement combinatoire : d'une part, il y a 2^n sous-ensembles d'un ensemble à n éléments. En effet, pour construire un sous-ensemble, on doit se demander pour les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$ si, oui ou non, ils appartiendront au sous-ensemble. Il y a 2^n manières de répondre à ces n questions. D'autre part, $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ décrit le nombre de sous-ensembles contenant $0, 1, 2, \dots$ et n éléments. Cela épuise tous les types de sous-ensembles possibles.

Le triangle de Pascal

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & 1 & & & & \\
n=1: & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2: & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3: & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4: & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1
\end{array}
$$

Les éléments d'une ligne sont calculés en faisant la somme des deux éléments qui se trouvent au-dessus à droite et au-dessus à gauche. On débute en plaçant des 1 aux extrémités.

Le triangle de Pascal — prise 2

$$
\begin{array}{lccccccccc}
n=0: & & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
n=1: & & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
n=2: & & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
n=3: & & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
n=4: & \binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4}
\end{array}
$$

Cette correspondance suggère une identité faisant intervenir les coefficients binomiaux.

L'identité de Pascal

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

L'identité de Pascal

Théorème. Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$. Alors

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

On peut interpréter cette identité de la manière suivante : supposons que vous êtes dans un groupe de n personnes. On doit choisir un groupe de k personnes. Ou bien vous faites partie du groupe, ou bien non. Si vous en faites partie, il faut choisir les $k-1$ membres parmi les $n-1$ personnes du groupe autres que vous. Cela se fait de $\binom{n-1}{k-1}$ manières. Si vous n'en faite pas partie, il faut choisir les k personnes parmi les $n-1$ personnes du groupe autre que vous. Cela se faite de $\binom{n-1}{k}$ manières. Comme il y a $\binom{n}{k}$ manières de choisir k personnes parmi n, on déduit l'identité.

4

Les coefficients multinomiaux

Une interprétation des coefficients binomiaux

Supposons que vous avez n boules distinguables à placer dans deux urnes distinguables, disons U_1 et U_2. Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ donne le nombre de façons de mettre k boules dans l'urne U_1 et $n-k$ boules dans l'urne U_2.

Description d'un problème

Supposons maintenant que vous avez n boules distinguables à placer dans m urnes distinguables, disons $U_1, U_2, \ldots, U_m$. De combien de manières différentes pouvons-nous répartir n_1 boules dans U_1, n_2 boules dans U_2, etc, jusqu'à n_m boules dans U_m ?

Description d'un problème

Supposons maintenant que vous avez n boules distinguables à placer dans m urnes distinguables, disons $U_1, U_2, \dots, U_m$. De combien de manières différentes pouvons-nous répartir n_1 boules dans U_1, n_2 boules dans U_2, etc, jusqu'à n_m boules dans U_m ?

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{m-1}}{n_m}$$

Description d'un problème

Supposons maintenant que vous avez n boules distinguables à placer dans m urnes distinguables, disons $U_1, U_2, \dots, U_m$. De combien de manières différentes pouvons-nous répartir n_1 boules dans U_1, n_2 boules dans U_2, etc, jusqu'à n_m boules dans U_m ?

$$\binom{n}{n_1}\binom{n-n_1}{n_2}\binom{n-n_1-n_2}{n_3}\dots\binom{n-n_1-n_2-\dots-n_{m-1}}{n_m}$$

La quantité précédente peut être simplifiée. Elle correspond à

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_m!}.$$

Le théorème multinomial

Le théorème multinomial

Théorème. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$ et soit $x_1, x_2, \dots, x_m$ des nombres réels. Désignons par $V_{n,m}$ l'ensemble de tous les m-uplets $(n_1, n_2, \dots, n_m)$ d'éléments de $\mathbb{N}$ satisfaisant $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$. Alors

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^n = \sum_{(n_1, n_2, \dots, n_m) \in V_{n,m}}^{n} \frac{n!}{n_1! n_2! \cdots n_m!} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \cdots x_m^{n_m}.$$

Exemple : Répartition des tâches

Sur une ferme, on doit répartir 20 personnes de la manière suivante : 5 seront responsables du jardin, 5 seront responsables des chevaux, 8 seront responsables des vaches et 2 seront responsables des cochons. Une personne ne peut être responsable de plus d'une tâche à la fois. De combien de manières peut-on répartir les tâches ?

Exemple : Répartition des tâches

Sur une ferme, on doit répartir 20 personnes de la manière suivante : 5 seront responsables du jardin, 5 seront responsables des chevaux, 8 seront responsables des vaches et 2 seront responsables des cochons. Une personne ne peut être responsable de plus d'une tâche à la fois. De combien de manières peut-on répartir les tâches ?

Réponse : $\frac{20!}{5!5!8!2!} = 2\,095\,133\,040$

Exemple : Formation d'équipes

Sur une ferme, on doit répartir 20 travailleurs en 4 équipes de cinq personnes qui seront à tour de rôle responsable de la traite des vaches. De combien de manières peut-on former les équipes de travailleurs ?

Exemple : Formation d'équipes

Sur une ferme, on doit répartir 20 travailleurs en 4 équipes de cinq personnes qui seront à tour de rôle responsable de la traite des vaches. De combien de manières peut-on former les équipes de travailleurs ?

Réponse : $\frac{20!}{5!5!5!5!4!} = 488\,864\,376$

Anagrammes : OUI et NON

Exemples. **Exemple 1 :** Les anagrammes du mot OUI sont OIU, UIO, UOI, IOU, IUO et OUI. En permutant les lettres O, U et I, on forme donc $3! = 6$ anagrammes.

Anagrammes : OUI et NON

Exemples. **Exemple 1 :** Les anagrammes du mot OUI sont OIU, UIO, UOI, IOU, IUO et OUI. En permutant les lettres O, U et I, on forme donc $3! = 6$ anagrammes.

Exemple 2 : Les anagrammes du mot NON sont ONN, NNO et NON. En permutant les lettres N, O et N, on forme donc 3 anagrammes. Ce nombre peut être envisagé de la manière suivante : on constate qu'il y a $3!$ permutation des symboles N, O et N. Ensuite, on se dit que N et N ne sont pas des objets distinguables. Il y a $2!$ manières de les interchanger. Ainsi, le nombre de permutations $3!$ doit être divisé par ce $2!$ pour ne garder que les anagrammes.

Exemple : Anagrammes de RESSASSER

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot RESSASSER ? On constate qu'il s'agit d'un mot à 9 lettres dont 2 R, 2 E, 4 S et 1 A.

Exemple : Anagrammes de RESSASSER

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot RESSASSER ? On constate qu'il s'agit d'un mot à 9 lettres dont 2 R, 2 E, 4 S et 1 A.

Réponse : $\frac{9!}{2!2!4!1!} = 3780$

Exemple : Anagrammes de RESSASSER

Combien y a-t-il d'anagrammes du mot RESSASSER ? On constate qu'il s'agit d'un mot à 9 lettres dont 2 R, 2 E, 4 S et 1 A.

Réponse : $\frac{9!}{2!2!4!1!} = 3780$

À titre informatif, le mot RESSASSER est le plus long palindrôme de la langue française.

5

La formule de Stirling

Exemple : Motivation pour Stirling

On joue à pile ou face $2n$ fois. Quelle est la probabilité d'obtenir le même nombre de pile que de face ?

Exemple : Motivation pour Stirling

On joue à pile ou face $2n$ fois. Quelle est la probabilité d'obtenir le même nombre de pile que de face ?

On voudrait avoir une approximation de cette quantité où la notion de factoriel est absente.

Le théorème de Stirling

Théorème.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Le théorème de Stirling

Théorème.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Conséquence : pour n suffisament grand, on peux approximer $n!$ par $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

Le théorème de Stirling

Théorème.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}} = 1.$$

Conséquence : pour n suffisament grand, on peux approximer $n!$ par $n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}$.

La démonstration se trouve dans les notes de cours, mais n'est pas matière à examen.

Application à notre problème

En résolvant le problème « On joue à pile ou face $2n$ fois. Quelle est la probabilité d'obtenir le même nombre de pile que de face ? », nous avons obtenu la réponse $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

Application à notre problème

En résolvant le problème « On joue à pile ou face $2n$ fois. Quelle est la probabilité d'obtenir le même nombre de pile que de face ? », nous avons obtenu la réponse $\frac{(2n)!}{(n!)^2 2^{2n}}$.

n	$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$	$\frac{1}{\sqrt{\pi n}}$	Différence
5	0,246 093 75	0,252 313 25	0,006 219 5
10	0,176 197 05	0,178 412 41	0,002 215 36
20	0,125 370 69	0,126 156 63	0,000 785 94
100	0,056 348 47	0,056 418 96	0,000 070 49

Remarques

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.