Probabilité conditionnelle et indépendance

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Résumé

1. Probabilité conditionnelle

2. Indépendance

1

Probabilité conditionnelle

Un exemple — piger une paire d’as

Un exemple — piger une paire d'as

Exemple. Pierre pige deux cartes d'un paquet de 52 cartes. Il regarde une des deux cartes et constate qu'il s'agit de l'as de pique. Quelle est la probabilité qu'il ait pigé une paire d'as ?

Un exemple — piger une paire d'as

> **Exemple.** Pierre pige deux cartes d'un paquet de 52 cartes. Il regarde une des deux cartes et constate qu'il s'agit de l'as de pique. Quelle est la probabilité qu'il ait pigé une paire d'as ?

On sait que l'ensemble des deux cartes pigées par Pierre est de la forme $\{A\spadesuit, X\}$ où X est une des 51 autre cartes du paquet. De ces 51 éventualités, il y en a 3 qui donnent lieu à une paire d'as. Ainsi, la probabilité cherchée est $\frac{3}{51} = \frac{1}{17}$.

Définition

Définition. Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont l'ensemble fondamental est Ω. Soit A et B des événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La **probabilité conditionnelle** de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A|B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Définition

Définition. Soit $\mathcal{E}$ une expérience aléatoire dont l'ensemble fondamental est Ω. Soit A et B des événements tels que $\mathbb{P}(B) > 0$. La **probabilité conditionnelle** de A sachant B, notée $\mathbb{P}(A|B)$, est définie par

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Observons que si Ω est fini, alors

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{\operatorname{Card} A \cap B}{\operatorname{Card} \Omega}}{\frac{\operatorname{Card} B}{\operatorname{Card} \Omega}} = \frac{\operatorname{Card} A \cap B}{\operatorname{Card} B}.$$

Sur la définition d'une probabilité conditionnelle

Théorème. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$.

Sur la définition d'une probabilité conditionnelle

Théorème. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

1. Pour tout événement A, on a que $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$;

Sur la définition d'une probabilité conditionnelle

Théorème. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

1. Pour tout événement A, on a que $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$;

Sur la définition d'une probabilité conditionnelle

Théorème. Soit B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors

1. Pour tout événement A, on a que $0 \leq \mathbb{P}(A|B) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}(\emptyset|B) = 0$ et $\mathbb{P}(\Omega|B) = 1$;
3. Soit $A_1, A_2, \ldots$ des événements mutuellement exclusifs. Alors $\mathbb{P}(\cup_{i=1}^{\infty} A_i|B) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i|B)$.

Retour sur l'exemple

Retour sur l'exemple

Exemple. Pierre pige deux cartes d'un paquet de 52 cartes. Il regarde une des deux cartes et constate qu'il s'agit de l'As de pique. Quelle est la probabilité qu'il ait pigé une paire d'As ?

Retour sur l'exemple

Exemple. Pierre pige deux cartes d'un paquet de 52 cartes. Il regarde une des deux cartes et constate qu'il s'agit de l'As de pique. Quelle est la probabilité qu'il ait pigé une paire d'As ?

On définit les événements

$$A = \text{Pierre a pigé une paire d'as,}$$
$$B = \text{Pierre a pigé l'as de pique.}$$

Retour sur l'exemple — suite

On constate que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{442} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{51}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{26}.$$

Retour sur l'exemple — suite

On constate que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{3}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{442} \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(B) = \frac{51}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{26}.$$

On vérifie que

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{1/442}{1/26} = \frac{1}{17}.$$

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

Exemple. On lance une pièce de monnaie 20 fois. Après 11 lancers, on constate que *pile* est apparue une fois de plus que le nombre de *faces*. Quelle est la probabilité qu'après les 20 lancers on constate qu'il y ait eu un nombre de *faces* supérieur au nombre de *piles* ?

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

> **Exemple.** On lance une pièce de monnaie 20 fois. Après 11 lancers, on constate que *pile* est apparue une fois de plus que le nombre de *faces*. Quelle est la probabilité qu'après les 20 lancers on constate qu'il y ait eu un nombre de *faces* supérieur au nombre de *piles* ?

Parmi les 11 premiers lancers, *pile* est apparu 6 fois et face 5 fois.

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

> **Exemple.** On lance une pièce de monnaie 20 fois. Après 11 lancers, on constate que *pile* est apparue une fois de plus que le nombre de *faces*. Quelle est la probabilité qu'après les 20 lancers on constate qu'il y ait eu un nombre de *faces* supérieur au nombre de *piles* ?

Parmi les 11 premiers lancers, *pile* est apparu 6 fois et face 5 fois. Pour que *face* soit obtenu au moins 11 fois après 20 lancers, *pile* ne doit pas être obtenu plus de 9 fois après les 20 lancers.

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

> **Exemple.** On lance une pièce de monnaie 20 fois. Après 11 lancers, on constate que *pile* est apparue une fois de plus que le nombre de *faces*. Quelle est la probabilité qu'après les 20 lancers on constate qu'il y ait eu un nombre de *faces* supérieur au nombre de *piles* ?

Parmi les 11 premiers lancers, *pile* est apparu 6 fois et face 5 fois. Pour que *face* soit obtenu au moins 11 fois après 20 lancers, *pile* ne doit pas être obtenu plus de 9 fois après les 20 lancers. C'est donc dire que parmi les 9 lancers qu'il reste à effectuer, au plus 3 doivent mener à un résultat *pile*.

Lancer une pièce de monnaie 20 fois

Exemple. On lance une pièce de monnaie 20 fois. Après 11 lancers, on constate que *pile* est apparue une fois de plus que le nombre de *faces*. Quelle est la probabilité qu'après les 20 lancers on constate qu'il y ait eu un nombre de *faces* supérieur au nombre de *piles* ?

Parmi les 11 premiers lancers, *pile* est apparu 6 fois et face 5 fois. Pour que *face* soit obtenu au moins 11 fois après 20 lancers, *pile* ne doit pas être obtenu plus de 9 fois après les 20 lancers. C'est donc dire que parmi les 9 lancers qu'il reste à effectuer, au plus 3 doivent mener à un résultat *pile*. La réponse est donc

$$\frac{\binom{9}{0}+\binom{9}{1}+\binom{9}{2}+\binom{9}{3}}{2^9} = \frac{130}{2^9} = \frac{65}{256} \approx 25{,}4\,\%.$$

Deux variantes d’un même problème

Deux variantes d'un même problème

Exemple (Piger une paire). On pige deux cartes d'un paquet régulier de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir pigé une paire ?

Deux variantes d'un même problème

Exemple (Piger une paire). On pige deux cartes d'un paquet régulier de 52 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir pigé une paire ?

Exemple (Piger une paire et en savoir un peu plus). On pige deux cartes d'un paquet régulier de 52 cartes. On remarque que parmi les cartes pigées, il y a une carte de pique et une carte de cœur. Quelle est la probabilité d'avoir pigé une paire ?

Influence positive ou négative

Influence positive ou négative

Exemple. Un paquet contient les 4 rois et les 4 as d'un paquet régulier. On pige 3 cartes dans ce paquet de 8 cartes. On définit les événements suivants :

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Piger une paire d'as} \\
B_1 &= \text{Avoir pigé l'as de pique} \\
B_2 &= \text{Avoir pigé au moins un as} \\
B_3 &= \text{Avoir pigé au moins un roi}
\end{aligned}
$$

Influence positive ou négative

Exemple. Un paquet contient les 4 rois et les 4 as d'un paquet régulier. On pige 3 cartes dans ce paquet de 8 cartes. On définit les événements suivants :

$$
\begin{aligned}
A &= \text{Piger une paire d'as} \\
B_1 &= \text{Avoir pigé l'as de pique} \\
B_2 &= \text{Avoir pigé au moins un as} \\
B_3 &= \text{Avoir pigé au moins un roi}
\end{aligned}
$$

Calculez $\mathbb{P}(A|B_i)$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

$$\mathbb{P}(A|B_1)$$

On veut calculer $\mathbb{P}(\text{Piger une paire d'as}|\text{Avoir pigé l'as de pique})$

$$\mathbb{P}(A|B_2)$$

On veut calculer $\mathbb{P}(\text{Piger une paire d'as}|\text{Avoir pigé au moins un as})$

$$\mathbb{P}(A|B_3)$$

On veut calculer $\mathbb{P}(\text{Piger une paire d'as}|\text{Avoir pigé au moins un roi})$

La règle de multiplication

La règle de multiplication

Si les probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont faciles à calculer, alors la définition de probabilité conditionnelle nous permet de calculer directement $\mathbb{P}(A|B)$. Parfois, c'est précisément cette dernière probabilité qui est facile à calculer. Dans ce cas, on peut se servir de l'information fournie par $\mathbb{P}(A|B)$ pour calculer la probabilité que A et B se réalisent conjointement.

La règle de multiplication

Si les probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont faciles à calculer, alors la définition de probabilité conditionnelle nous permet de calculer directement $\mathbb{P}(A|B)$. Parfois, c'est précisément cette dernière probabilité qui est facile à calculer. Dans ce cas, on peut se servir de l'information fournie par $\mathbb{P}(A|B)$ pour calculer la probabilité que A et B se réalisent conjointement.

Théorème. Soit A et B des événements. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

La règle de multiplication

Si les probabilités $\mathbb{P}(A \cap B)$ et $\mathbb{P}(B)$ sont faciles à calculer, alors la définition de probabilité conditionnelle nous permet de calculer directement $\mathbb{P}(A|B)$. Parfois, c'est précisément cette dernière probabilité qui est facile à calculer. Dans ce cas, on peut se servir de l'information fournie par $\mathbb{P}(A|B)$ pour calculer la probabilité que A et B se réalisent conjointement.

Théorème. Soit A et B des événements. Alors

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B)\mathbb{P}(B) \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B|A)\mathbb{P}(A).$$

Pour que les équations précédentes aient du sens, il est nécessaire que $\mathbb{P}(B) > 0$ dans le premier cas et que $\mathbb{P}(A) > 0$ dans le second.

Retour sur l’exemple des 20 lancers

Retour sur l'exemple des 20 lancers

Exemple. On lance une pièce de monnaie 20 fois. On définit les événements suivants :

$E =$ Après 11 lancers, *pile* est apparue une fois de plus que face.
$F =$ Après 20 lancers, *face* est apparue plus souvent que pile.

Quelle est la probabilité que E et F se réalisent simultanément ?

Retour sur l'exemple des 20 lancers

Exemple. On lance une pièce de monnaie 20 fois. On définit les événements suivants :

$E =$ Après 11 lancers, *pile* est apparue une fois de plus que face.
$F =$ Après 20 lancers, *face* est apparue plus souvent que pile.

Quelle est la probabilité que E et F se réalisent simultanément ?

Nous avons que

$$\mathbb{P}(E \cap F) = \mathbb{P}(F|E)\mathbb{P}(E) = \frac{65}{256} \cdot \frac{\binom{11}{6}}{2^{11}} \approx 5{,}7\,\%.$$

La règle de multiplication - cas général

Dans le cas où nous avons n événements, la règle prend la forme ci-dessous.

La règle de multiplication - cas général

Dans le cas où nous avons n événements, la règle prend la forme ci-dessous.

Théorème. Soit $E_1, E_2, \dots, E_n$ des événements tels que

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} E_i) > 0.$$

Alors

$$\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n} E_i) = \mathbb{P}(E_1)\mathbb{P}(E_2|E_1)\mathbb{P}(E_3|E_1 \cap E_2) \dots \mathbb{P}(E_n| \cap_{i=1}^{n-1} E_i).$$

Exemple : des boules et des diviseurs

Exemple : des boules et des diviseurs

Exemple. On place les boules $B_i, i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, dans des urnes numérotées 1, 2 et 3. Quelle est la probabilité que pour chaque valeur de i, la boule B_i soit placée dans une urne dont le numéro est un diviseur de i ?

Exemple : des boules et des diviseurs

Exemple. On place les boules $B_i, i \in \{1, 2, \dots, 9\}$, dans des urnes numérotées 1, 2 et 3. Quelle est la probabilité que pour chaque valeur de i, la boule B_i soit placée dans une urne dont le numéro est un diviseur de i ?

On définit l'événement E_i par : *la boule B_i est placée dans une urne dont le numéro est un diviseur de i.*

Exemple : des boules qui s’ajoutent

Exemple : des boules qui s'ajoutent

Exemple. On pige 5 boules d'une urne contenant initialement 5 boules rouges et 5 boules noires. À la $i^{\text{ième}}$ pige, si on pige une boule rouge, on remet la boule dans l'urne pour les autres piges et on y ajoute aussi 5 nouvelles boules rouges. Si on pige une boule noire, on fait simplement remettre la boule noire dans l'urne. Quelle est la probabilité de piger 5 boules rouges lors des cinq piges ?

Exemple : des boules qui s'ajoutent

Exemple. On pige 5 boules d'une urne contenant initialement 5 boules rouges et 5 boules noires. À la $i^{\text{ième}}$ pige, si on pige une boule rouge, on remet la boule dans l'urne pour les autres piges et on y ajoute aussi 5 nouvelles boules rouges. Si on pige une boule noire, on fait simplement remettre la boule noire dans l'urne. Quelle est la probabilité de piger 5 boules rouges lors des cinq piges ?

On définit l'événement E_i par : *une boule rouge est pigée lors de la* $i^{\text{ième}}$ *pige*.

La loi des probabilités totales

La loi des probabilités totales

Théorème. Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω. Alors pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i).$$

La loi des probabilités totales

Théorème. Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω. Alors pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i).$$

Remarques.

1. Dire que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est une partition de Ω signifie que les événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont non vides, mutuellement exclusifs et que $\cup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.

La loi des probabilités totales

Théorème. Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω. Alors pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i).$$

Remarques.

1. Dire que $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est une partition de Ω signifie que les événements $E_1, E_2, \dots, E_n$ sont non vides, mutuellement exclusifs et que $\cup_{i=1}^{n} E_i = \Omega$.
2. La loi des probabilités totales est aussi valide dans le cas où on a une famille infinie dénombrable d'ensembles.

Événements exhaustifs

Événements exhaustifs

Définition. Soit Ω l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire. Une collection d'événements $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est dite **exhaustive** si

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega.$$

Événements exhaustifs

Définition. Soit Ω l'espace fondamental associé à une expérience aléatoire. Une collection d'événements $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ est dite **exhaustive** si

$$\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \Omega.$$

Remarque. Pour signifier que les ensembles $E_1, E_2, \dots, E_n$ forment une partition de Ω, on peut aussi dire que les E_i sont non vides, mutuellement exclusifs et exhaustifs.

Exemple d’utilisation de la loi des probabilités totales

Exemple d'utilisation de la loi des probabilités totales

Exemple. Le tournoi de pétanque annuel de la résidence Déziel s'amorcera demain. Au premier tour, Henri-Paul affrontera Muguette avec probabilité $0{,}2$, Ghyslaine avec probabilité $0{,}3$ ou Yvon avec probabilité $0{,}5$. Sa probabilité de victoire contre la redoutable Muguette n'est que de $0{,}3$. Par contre, elle est de $0{,}6$ contre Ghyslaine et de $0{,}7$ contre Yvon. Quelle est la probabilité qu'Henri-Paul passe au deuxième tour ?

Le théorème de Bayes

Le théorème de Bayes

Théorème. Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω. Soit $A \subseteq \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nous avons que

$$\mathbb{P}(E_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}.$$

Le théorème de Bayes

Théorème. Soit $\{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ une partition de Ω. Soit $A \subseteq \Omega$ un événement tel que $\mathbb{P}(A) > 0$. Alors pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, nous avons que

$$\mathbb{P}(E_i|A) = \frac{\mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}{\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A|E_i)\mathbb{P}(E_i)}.$$

Remarque. Le théorème de Bayes est aussi valide dans le cas où on a une famille infinie dénombrable.

Démonstration

Pour démontrer le théorème de Bayes, on procède comme suit :

Démonstration

Pour démontrer le théorème de Bayes, on procède comme suit :

1. on utilise d'abord la définition d'une probabilité conditionnelle pour exprimer $\mathbb{P}(E_i|A)$;

Démonstration

Pour démontrer le théorème de Bayes, on procède comme suit :

1. on utilise d'abord la définition d'une probabilité conditionnelle pour exprimer $\mathbb{P}(E_i|A)$;
2. puis la règle de multiplication en conditionnant sur les E_i au numérateur ;

Démonstration

Pour démontrer le théorème de Bayes, on procède comme suit :

1. on utilise d'abord la définition d'une probabilité conditionnelle pour exprimer $\mathbb{P}(E_i|A)$;
2. puis la règle de multiplication en conditionnant sur les E_i au numérateur ;
3. puis on exprime $\mathbb{P}(A)$ au moyen du théorème des probabilités totales au dénominateur.

Un exemple — les étudiants du cours de génie

Un exemple — les étudiants du cours de génie

Exemple.

Programme	Nb. d'inscrits	Nb. d'échecs
Génie mécanique	50	10
Génie géologique	38	5
Génie civil	17	2

Un exemple — les étudiants du cours de génie

Exemple.

Programme	Nb. d'inscrits	Nb. d'échecs
Génie mécanique	50	10
Génie géologique	38	5
Génie civil	17	2

On choisit un étudiant au hasard inscrit dans ce cours de génie. On constate qu'il a réussi le cours. Quelle est la probabilité que l'étudiant choisi soit inscrit au programme de génie mécanique ?

Exemple : devine la couleur

Exemple : devine la couleur

Exemple. Un paquet contient trois cartes : une a les deux faces rouges, une à les deux faces noires et une a une face rouge et une face noire. On pige une carte au hasard et on la pose sur la table. La face qui est exposée est rouge. Qu'elle est la probabilité qu'en la retournant, on constate que son autre face soit aussi de couleur rouge ?

2

Indépendance

Définition

Définition. Deux événements A et B sont indépendants si on a que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Définition

Définition. Deux événements A et B sont indépendants si on a que

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B).$$

Proposition. Soit A et B des événements indépendants.

1. Si $\mathbb{P}(B) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$.
2. Si $\mathbb{P}(A) > 0$, alors $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$.

Remarques sur l’indépendance

Remarques sur l'indépendance

1. On peut montrer que si des événements A et B satisfont simultanément $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, alors ils sont indépendants.

Remarques sur l'indépendance

1. On peut montrer que si des événements A et B satisfont simultanément $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, alors ils sont indépendants.
2. On peut montrer que si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

Remarques sur l'indépendance

1. On peut montrer que si des événements A et B satisfont simultanément $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ et $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$, alors ils sont indépendants.
2. On peut montrer que si $\mathbb{P}(A) > 0$ et $\mathbb{P}(B) > 0$,

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A) \iff \mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B).$$

3. Les deux remarques précédentes nous permettent de définir l'indépendance d'événements en utilisant les probabilités conditionnelles.

L’indépendance pour trois événements

L'indépendance pour trois événements

Définition. Trois événements A, B et C sont indépendants si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

Remarque. Dès que les conditions 1, 2 et 3 sont vérifiées, on peut dire que les événements A, B et C sont **indépendants deux à deux**.

L'indépendance pour trois événements

Définition. Trois événements A, B et C sont indépendants si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$;
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$;
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$;
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

L'indépendance pour trois événements

Définition. Trois événements A, B et C sont indépendants si les quatre conditions suivantes sont satisfaites :

1. $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$;
2. $\mathbb{P}(A \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(C)$;
3. $\mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$;
4. $\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$.

Remarque. Dès que les conditions 1, 2 et 3 sont vérifiées, on peut dire que les événements A, B et C sont **indépendants deux à deux**.

L’exemple de Bernstein (1928)

L'exemple de Bernstein (1928)

Exemple. Une urne contient quatre billets portant chacun un numéro. Ces derniers sont $112, 121, 211$ et 222. On pige un billet. On définit les événements suivants :

$$A_1 = \text{Le premier chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$
$$A_2 = \text{Le deuxième chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$
$$A_3 = \text{Le troisième chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$

L'exemple de Bernstein (1928)

Exemple. Une urne contient quatre billets portant chacun un numéro. Ces derniers sont $112, 121, 211$ et 222. On pige un billet. On définit les événements suivants :

$$A_1 = \text{Le premier chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$
$$A_2 = \text{Le deuxième chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$
$$A_3 = \text{Le troisième chiffre du numéro sur le billet pigé est } 1$$

Remarque. Cet exemple est tiré du livre *Counterexamples in Probability* de J. Stoyanov [1].

Cas général

Cas général

Définition. Soit J un ensemble fini ou dénombrable. Soit $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$, une collection quelconque d'événements. Ces événements sont dits indépendants si pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour chaque choix de $j_1, j_2, \dots, j_n \in J$, avec $j_h \neq j_\ell$ pour tout $h \neq \ell$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{j_k}\right).$$

Cas général

Définition. Soit J un ensemble fini ou dénombrable. Soit $\mathcal{B} = \{B_j : j \in J\}$, une collection quelconque d'événements. Ces événements sont dits indépendants si pour chaque $n \in \mathbb{N}^\star$ et pour chaque choix de $j_1, j_2, \dots, j_n \in J$, avec $j_h \neq j_\ell$ pour tout $h \neq \ell$, on a

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} B_{j_k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(B_{j_k}\right).$$

Remarque. On peut vérifier que cette définition est cohérente avec les définitions données précédemment pour les cas de deux et trois événements.

Principe de préservation de l’indépendance

Principe de préservation de l'indépendance

Théorème. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $E_1, E_2, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}$ des événements mutuellement indépendants. Soit F un événement défini à partir des événements $E_1, E_2, \dots, E_m$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Soit G un événement défini à partir des événements $E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_{m+n}$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Alors les événements F et G sont indépendants.

Principe de préservation de l'indépendance

Théorème. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $E_1, E_2, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}$ des événements mutuellement indépendants. Soit F un événement défini à partir des événements $E_1, E_2, \dots, E_m$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Soit G un événement défini à partir des événements $E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_{m+n}$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Alors les événements F et G sont indépendants.

De ce principe, on peut entre autre tirer les conclusions ci-dessous :

1. Si A et B sont indépendants, alors A^{c} et B sont indépendants ;

Principe de préservation de l'indépendance

Théorème. Soit $m, n \in \mathbb{N}^\star$. Soit $E_1, E_2, \dots, E_m, E_{m+1}, \dots, E_{m+n}$ des événements mutuellement indépendants. Soit F un événement défini à partir des événements $E_1, E_2, \dots, E_m$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Soit G un événement défini à partir des événements $E_{m+1}, E_{m+2}, \dots, E_{m+n}$ à l'aide des opérations ensemblistes union, intersection et complémentation. Alors les événements F et G sont indépendants.

De ce principe, on peut entre autre tirer les conclusions ci-dessous :

1. Si A et B sont indépendants, alors A^{c} et B sont indépendants ;
2. Si A, B et C sont indépendants, alors A^{c} et $B \cup C$ sont indépendants.

Exemple

Exemple. Soit A et B des événements indépendants. Montrez que A et B^c sont aussi des événements indépendants.

Bibliographie

[1] Jordan M. Stoyanov. *Counterexamples in Probability*. 3rd. Mineola, New York : Dover Publications, 2013. ISBN : 978-0-486-49998-7.

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.