Probabilités géométriques et distributions continues

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Hiver 2025

Résumé

1. Probabilités géométriques

2. Vers les distributions continues

1

Probabilités géométriques

Cas où Ω est non dénombrable

Cas où Ω est non dénombrable

Un intervalle d'intérieur non vide (par exemple $]0,1[$), ou un disque dans le plan, sont parfois des espaces fondamentaux pour des expériences aléatoires.

Cas où Ω est non dénombrable

Un intervalle d'intérieur non vide (par exemple $]0, 1[$), ou un disque dans le plan, sont parfois des espaces fondamentaux pour des expériences aléatoires. Dans ces cas, prendre le rapport des cardinalités ne donne pas lieu à une mesure de probabilité : tous les ensembles en jeu sont infinis.

Cas où Ω est non dénombrable

Un intervalle d'intérieur non vide (par exemple $]0, 1[$), ou un disque dans le plan, sont parfois des espaces fondamentaux pour des expériences aléatoires. Dans ces cas, prendre le rapport des cardinalités ne donne pas lieu à une mesure de probabilité : tous les ensembles en jeu sont infinis.

On procède plutôt en mesurant la *longueur* (ou l'*aire*, ou le *volume*) des régions contenant les réalisations de l'événement.

Cas où Ω est non dénombrable

Un intervalle d'intérieur non vide (par exemple $]0, 1[$), ou un disque dans le plan, sont parfois des espaces fondamentaux pour des expériences aléatoires. Dans ces cas, prendre le rapport des cardinalités ne donne pas lieu à une mesure de probabilité : tous les ensembles en jeu sont infinis.

On procède plutôt en mesurant la *longueur* (ou l'*aire*, ou le *volume*) des régions contenant les réalisations de l'événement.

> Pour une région A de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, on note $|A|$ sa longueur, son aire ou son volume. Le cadre de Kolmogorov garantit que cette notion est bien définie pour tous les boréliens.

La probabilité uniforme sur une région

La probabilité uniforme sur une région

Définition. Soit Ω une région de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ telle que $0 < |\Omega| < \infty$. On dit qu'un point est **choisi au hasard** (ou **uniformément**) dans Ω si, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

La probabilité uniforme sur une région

Définition. Soit Ω une région de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ telle que $0 < |\Omega| < \infty$. On dit qu'un point est **choisi au hasard** (ou **uniformément**) dans Ω si, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Remarques.

- On admet que cette fonction satisfait les axiomes de Kolmogorov.

La probabilité uniforme sur une région

Définition. Soit Ω une région de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ telle que $0 < |\Omega| < \infty$. On dit qu'un point est **choisi au hasard** (ou **uniformément**) dans Ω si, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Remarques.

- On admet que cette fonction satisfait les axiomes de Kolmogorov.
- C'est l'analogue continu du cas équiprobable $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

La probabilité uniforme sur une région

Définition. Soit Ω une région de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ telle que $0 < |\Omega| < \infty$. On dit qu'un point est **choisi au hasard** (ou **uniformément**) dans Ω si, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Remarques.

- On admet que cette fonction satisfait les axiomes de Kolmogorov.
- C'est l'analogue continu du cas équiprobable $\mathbb{P}(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.
- Un point a une mesure nulle : $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$,

La probabilité uniforme sur une région

Définition. Soit Ω une région de $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ telle que $0 < |\Omega| < \infty$. On dit qu'un point est **choisi au hasard** (ou **uniformément**) dans Ω si, pour tout événement $A \subseteq \Omega$,

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}.$$

Remarques.

- On admet que cette fonction satisfait les axiomes de Kolmogorov.
- C'est l'analogue continu du cas équiprobable $\mathbb{P}(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$.
- Un point a une mesure nulle : $\mathbb{P}(\{x\}) = 0$, d'où $\mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}(]a, b[)$.

Deux exemples

Deux exemples

Exemples. **Exemple 1 :** On choisit un nombre au hasard dans $]0, 2[$. Quelle est la probabilité de choisir un nombre dans $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

Deux exemples

Exemples. **Exemple 1 :** On choisit un nombre au hasard dans $]0, 2[$. Quelle est la probabilité de choisir un nombre dans $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

Réponse : $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 - 0} = \dfrac{1}{12}$

Deux exemples

Exemples. **Exemple 1 :** On choisit un nombre au hasard dans $]0, 2[$. Quelle est la probabilité de choisir un nombre dans $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

Réponse : $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 - 0} = \dfrac{1}{12}$

Exemple 2 : On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 10. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus près du centre que de la frontière ?

Deux exemples

Exemples. **Exemple 1 :** On choisit un nombre au hasard dans $]0, 2[$. Quelle est la probabilité de choisir un nombre dans $]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$?

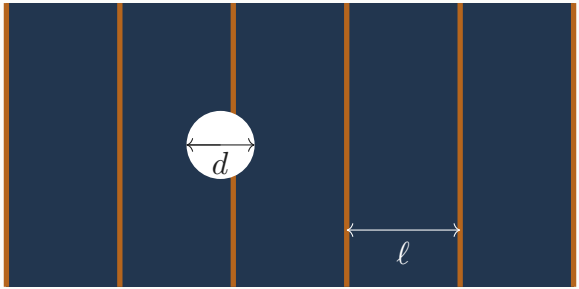
Réponse : $\dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{2 - 0} = \dfrac{1}{12}$

Exemple 2 : On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 10. Quelle est la probabilité que le point choisi soit plus près du centre que de la frontière ?

Réponse : $\frac{\pi 5^2}{\pi 10^2} = \frac{1}{4}$

Exemple : Plancher avec planches habituelles

On laisse tomber une pièce de monnaie circulaire de diamètre $d \leq \ell$ sur un plancher dont les planches rectangulaires sont de largeur ℓ. Quelle est la probabilité que la pièce de monnaie touche à plus d'une planche ?



Exemple : Plancher — solution

Exemple : Plancher — solution

Seule compte la position horizontale du centre de la pièce à l'intérieur de sa planche : on la suppose choisie au hasard dans $[0, \ell]$.

Exemple : Plancher — solution

Seule compte la position horizontale du centre de la pièce à l'intérieur de sa planche : on la suppose choisie au hasard dans $[0, \ell]$.

La pièce reste sur une seule planche si et seulement si son centre est à une distance d'au moins $\frac{d}{2}$ des deux bords, c'est-à-dire s'il se trouve dans $[\frac{d}{2}, \ell - \frac{d}{2}]$, de longueur $\ell - d$.

Exemple : Plancher — solution

Seule compte la position horizontale du centre de la pièce à l'intérieur de sa planche : on la suppose choisie au hasard dans $[0, \ell]$.

La pièce reste sur une seule planche si et seulement si son centre est à une distance d'au moins $\frac{d}{2}$ des deux bords, c'est-à-dire s'il se trouve dans $[\frac{d}{2}, \ell - \frac{d}{2}]$, de longueur $\ell - d$.

$$\mathbb{P}(\text{touche plus d'une planche}) = 1 - \frac{\ell - d}{\ell} = \frac{d}{\ell}.$$

Exemple : Plancher — solution

Seule compte la position horizontale du centre de la pièce à l'intérieur de sa planche : on la suppose choisie au hasard dans $[0, \ell]$.

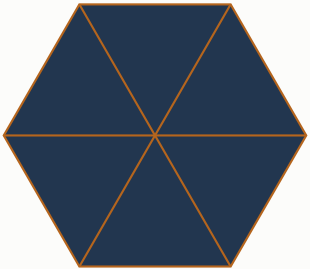
La pièce reste sur une seule planche si et seulement si son centre est à une distance d'au moins $\frac{d}{2}$ des deux bords, c'est-à-dire s'il se trouve dans $[\frac{d}{2}, \ell - \frac{d}{2}]$, de longueur $\ell - d$.

$$\mathbb{P}(\text{touche plus d'une planche}) = 1 - \frac{\ell - d}{\ell} = \frac{d}{\ell}.$$

On a remplacé « position de la pièce sur le plancher » par un modèle plus simple contenant toute l'information utile : c'est une étape clé de la modélisation.

Exemple : Tuiles en triangles équilatéraux

On laisse tomber une pièce de monnaie circulaire de rayon r sur un plancher formé de tuiles qui sont des triangles équilatéraux dont les côtés sont de longueur 1. Sur la figure ci-dessous, on peut apercevoir six de ces tuiles partageant un sommet. Quelle est la probabilité que la pièce de monnaie ne touche à aucun des segments de couleur orange ?



Exemple : Tuiles — solution

Exemple : Tuiles — solution

On suppose que le centre de la pièce tombe au hasard dans une tuile. Le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1 est $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

Exemple : Tuiles — solution

On suppose que le centre de la pièce tombe au hasard dans une tuile. Le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1 est $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

La pièce ne touche aucun côté si et seulement si son centre est à une distance d'au moins r des trois côtés.

Exemple : Tuiles — solution

On suppose que le centre de la pièce tombe au hasard dans une tuile. Le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1 est $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

La pièce ne touche aucun côté si et seulement si son centre est à une distance d'au moins r des trois côtés. Ces points forment un triangle équilatéral de même centre, dont le cercle inscrit a pour rayon $\rho - r$ (si $r \leq \rho$).

Exemple : Tuiles — solution

On suppose que le centre de la pièce tombe au hasard dans une tuile. Le rayon du cercle inscrit dans un triangle équilatéral de côté 1 est $\rho = \frac{\sqrt{3}}{6}$.

La pièce ne touche aucun côté si et seulement si son centre est à une distance d'au moins r des trois côtés. Ces points forment un triangle équilatéral de même centre, dont le cercle inscrit a pour rayon $\rho - r$ (si $r \leq \rho$).

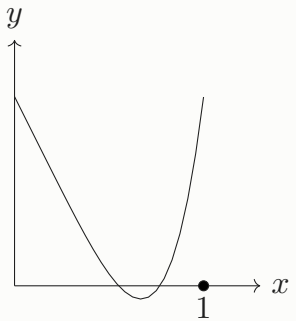
Le rapport des aires de deux triangles semblables est le carré du rapport de similitude :

$$\mathbb{P}(\text{aucun segment touché}) = \left(\frac{\rho - r}{\rho}\right)^2 = \left(1 - 2\sqrt{3}\, r\right)^2, \qquad 0 \leq r \leq \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

Majoration et minoration d’une probabilité

Majoration et minoration d'une probabilité

Ci-dessous est représenté le graphique du polynôme $p(x) = 2x^5 - 2x + 1$ qui possède exactement deux racines réelles positives, disons r_1 et r_2 (avec $r_1 < r_2$), dans l'intervalle $]0, 1[$. On effectue une expérience aléatoire qui consiste à choisir un nombre réel au hasard dans cet intervalle.



Exemple : Majoration et minoration

Trouvez une majoration et une minoration non triviales de la probabilité de réalisation de l'événement A, où A correspond à : *Le nombre choisi se trouve dans l'intervalle* $]r_1, r_2[$.

Exemple : Majoration et minoration

Trouvez une majoration et une minoration non triviales de la probabilité de réalisation de l'événement A, où A correspond à : *Le nombre choisi se trouve dans l'intervalle* $]r_1, r_2[$.

On vérifie que $p\,(0{,}5) > 0, p\,(0{,}6) < 0, p\,(0{,}7) < 0$ et $p\,(0{,}8) > 0$. Soit B l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}5\,;0{,}8[$

Exemple : Majoration et minoration

Trouvez une majoration et une minoration non triviales de la probabilité de réalisation de l'événement A, où A correspond à : *Le nombre choisi se trouve dans l'intervalle* $]r_1, r_2[$.

On vérifie que $p\,(0{,}5) > 0, p\,(0{,}6) < 0, p\,(0{,}7) < 0$ et $p\,(0{,}8) > 0$. Soit B l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}5\,;0{,}8[$ et soit C l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}6\,;0{,}7[$.

Exemple : Majoration et minoration

Trouvez une majoration et une minoration non triviales de la probabilité de réalisation de l'événement A, où A correspond à : *Le nombre choisi se trouve dans l'intervalle* $]r_1, r_2[$.

On vérifie que $p\,(0{,}5) > 0, p\,(0{,}6) < 0, p\,(0{,}7) < 0$ et $p\,(0{,}8) > 0$. Soit B l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}5\,;0{,}8[$ et soit C l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}6\,;0{,}7[$. Nous avons que $C \subseteq A \subseteq B$.

Exemple : Majoration et minoration

Trouvez une majoration et une minoration non triviales de la probabilité de réalisation de l'événement A, où A correspond à : *Le nombre choisi se trouve dans l'intervalle* $]r_1, r_2[$.

On vérifie que $p\,(0{,}5) > 0, p\,(0{,}6) < 0, p\,(0{,}7) < 0$ et $p\,(0{,}8) > 0$. Soit B l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}5\,;0{,}8[$ et soit C l'événement *le nombre est choisi dans l'intervalle* $]0{,}6\,;0{,}7[$. Nous avons que $C \subseteq A \subseteq B$. Par monotonicité, comme $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$, on en déduit que $\frac{1}{10} \leq \mathbb{P}(A) \leq \frac{3}{10}$.

À l'aide d'une méthode numérique pour le calcul des racines de $p(x)$, on trouve que $\mathbb{P}(A) \approx 0{,}218$.

2

Vers les distributions continues

Retour sur le disque

Retour sur le disque

On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 1. Pour $0 \leq r \leq 1$,

$$\mathbb{P}(\text{distance} \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

Retour sur le disque

On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 1. Pour $0 \leq r \leq 1$,

$$\mathbb{P}(\text{distance} \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on en déduit

$$\mathbb{P}(a < \text{distance} \leq b) = b^2 - a^2 = \int_a^b 2r \, \mathrm{d}r.$$

Retour sur le disque

On choisit un point au hasard dans un disque de rayon 1. Pour $0 \leq r \leq 1$,

$$\mathbb{P}(\text{distance} \leq r) = \frac{\pi r^2}{\pi \cdot 1^2} = r^2.$$

Pour $0 \leq a \leq b \leq 1$, on en déduit

$$\mathbb{P}(a < \text{distance} \leq b) = b^2 - a^2 = \int_a^b 2r \, \mathrm{d}r.$$

Le point est uniforme dans le disque, mais sa distance au centre *n'est pas* uniforme dans $[0, 1]$. La fonction $f(r) = 2r$ décrit comment la probabilité se répartit.

Densité de probabilité

Densité de probabilité

Définition. Une **densité de probabilité** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

Densité de probabilité

Définition. Une **densité de probabilité** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;

Densité de probabilité

Définition. Une **densité de probabilité** est une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable telle que

1. $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$;
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1.$

Mesure de probabilité associée à une densité

Mesure de probabilité associée à une densité

Proposition. Si f est une densité, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tous } a \leq b.$$

Mesure de probabilité associée à une densité

Proposition. Si f est une densité, il existe une unique mesure de probabilité $\mathbb{P}$ sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ telle que

$$\mathbb{P}([a,b]) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{pour tous } a \le b.$$

Ce résultat est admis : sa démonstration relève de la théorie de la mesure. Pour tout borélien A, on écrit alors $\mathbb{P}(A) = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x$.

Exemples de densités

Exemples de densités

Exemples.

- **Uniforme sur** $[a, b]$ **:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$, et 0 sinon.

Exemples de densités

Exemples.

- **Uniforme sur** $[a, b]$ **:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$, et 0 sinon. On retrouve $\mathbb{P}([c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$ pour $a \leq c \leq d \leq b$.

Exemples de densités

Exemples.

- **Uniforme sur $[a,b]$:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$, et 0 sinon. On retrouve $\mathbb{P}([c,d]) = \frac{d-c}{b-a}$ pour $a \leq c \leq d \leq b$.
- **Distance au centre dans le disque :** $f(r) = 2r$ si $0 \leq r \leq 1$, et 0 sinon.

Exemples de densités

Exemples.

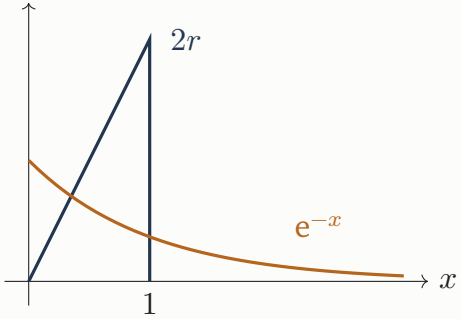
- **Uniforme sur** $[a,b]$ **:** $f(x)=\frac{1}{b-a}$ si $a\leq x\leq b$, et 0 sinon. On retrouve $\mathbb{P}([c,d])=\frac{d-c}{b-a}$ pour $a\leq c\leq d\leq b$.
- **Distance au centre dans le disque :** $f(r)=2r$ si $0\leq r\leq 1$, et 0 sinon.
- **Durée de vie :** $f(x)=\mathrm{e}^{-x}$ si $x\geq 0$, et 0 sinon.

Exemples de densités

Exemples.

- **Uniforme sur $[a, b]$:** $f(x) = \frac{1}{b-a}$ si $a \leq x \leq b$, et 0 sinon. On retrouve $\mathbb{P}([c, d]) = \frac{d-c}{b-a}$ pour $a \leq c \leq d \leq b$.
- **Distance au centre dans le disque :** $f(r) = 2r$ si $0 \leq r \leq 1$, et 0 sinon.
- **Durée de vie :** $f(x) = \mathrm{e}^{-x}$ si $x \geq 0$, et 0 sinon. On vérifie que $\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = 1$.

Allure de deux densités



Exemple : Trouver la constante

Soit $f(x) = c\,x^2$ si $0 \leq x \leq 2$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminez la constante c pour que f soit une densité.
2. Un nombre est choisi selon la densité f. Calculez la probabilité qu'il soit supérieur à 1.

Exemple : Trouver la constante

Soit $f(x) = c\,x^2$ si $0 \le x \le 2$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminez la constante c pour que f soit une densité.
2. Un nombre est choisi selon la densité f. Calculez la probabilité qu'il soit supérieur à 1.

$$1 = \int_0^2 c\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8c}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{3}{8}.$$

Exemple : Trouver la constante

Soit $f(x) = c\,x^2$ si $0 \le x \le 2$, et $f(x) = 0$ sinon.

1. Déterminez la constante c pour que f soit une densité.
2. Un nombre est choisi selon la densité f. Calculez la probabilité qu'il soit supérieur à 1.

$$1 = \int_0^2 c\,x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8c}{3} \quad \Longrightarrow \quad c = \frac{3}{8}.$$

$$\mathbb{P}([1,2]) = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2\,\mathrm{d}x = \frac{8-1}{8} = \frac{7}{8}.$$

Une densité n’est pas une probabilité

Une densité n'est pas une probabilité

Remarques.

- Pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La valeur $f(x)$ *n'est pas* la probabilité de $\{x\}$.

Une densité n'est pas une probabilité

Remarques.

- Pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La valeur $f(x)$ *n'est pas* la probabilité de $\{x\}$.
- Une densité peut prendre des valeurs supérieures à 1 : la densité uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$ vaut 2.

Une densité n'est pas une probabilité

Remarques.

- Pour tout x, $\mathbb{P}(\{x\}) = \int_x^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$. La valeur $f(x)$ *n'est pas* la probabilité de $\{x\}$.
- Une densité peut prendre des valeurs supérieures à 1 : la densité uniforme sur $[0, \frac{1}{2}]$ vaut 2.
- Si f est continue en x et $h > 0$ est petit, $\mathbb{P}([x, x+h]) \approx f(x)\,h$: $f(x)$ est une probabilité *par unité de longueur*.

Discret et continu : un même cadre

Discret et continu : un même cadre

	Discret	**Continu (à densité)**
Espace	Ω fini ou dénombrable	$\mathbb{R}$ (ou un intervalle)
Description	poids $p(\omega) \geq 0$	densité $f(x) \geq 0$
Normalisation	$\sum_{\omega} p(\omega) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
$\mathbb{P}(A)$	$\sum_{\omega \in A} p(\omega)$	$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$
$\mathbb{P}(\{x\})$	$p(x)$	0

Discret et continu : un même cadre

	Discret	**Continu (à densité)**
Espace	Ω fini ou dénombrable	$\mathbb{R}$ (ou un intervalle)
Description	poids $p(\omega) \geq 0$	densité $f(x) \geq 0$
Normalisation	$\sum_{\omega} p(\omega) = 1$	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$
$\mathbb{P}(A)$	$\sum_{\omega \in A} p(\omega)$	$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x$
$\mathbb{P}(\{x\})$	$p(x)$	0

Dans les deux cas, $\mathbb{P}$ est une mesure de probabilité au sens de Kolmogorov : toutes les règles de calcul (complémentarité, union, Boole, probabilité conditionnelle, Bayes, indépendance) s'appliquent de la même façon.

Ni discret, ni continu

Ni discret, ni continu

Exemple. Un automobiliste arrive à un feu. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le feu est vert et il n'attend pas ; sinon, il attend un temps choisi au hasard dans $]0, 60]$ secondes.

Ni discret, ni continu

Exemple. Un automobiliste arrive à un feu. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le feu est vert et il n'attend pas ; sinon, il attend un temps choisi au hasard dans $]0, 60]$ secondes.

Pour $0 \leq t \leq 60$, par la loi des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\text{attente} \leq t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{60}.$$

Ni discret, ni continu

> **Exemple.** Un automobiliste arrive à un feu. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le feu est vert et il n'attend pas ; sinon, il attend un temps choisi au hasard dans $]0, 60]$ secondes.

Pour $0 \leq t \leq 60$, par la loi des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\text{attente} \leq t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{60}.$$

Comme $\mathbb{P}(\text{attente} = 0) = \frac{1}{2} > 0$, ce n'est pas une loi à densité ;

Ni discret, ni continu

> **Exemple.** Un automobiliste arrive à un feu. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le feu est vert et il n'attend pas ; sinon, il attend un temps choisi au hasard dans $]0, 60]$ secondes.

Pour $0 \leq t \leq 60$, par la loi des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\text{attente} \leq t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{60}.$$

Comme $\mathbb{P}(\text{attente} = 0) = \frac{1}{2} > 0$, ce n'est pas une loi à densité ; comme l'attente prend un continuum de valeurs, ce n'est pas une loi discrète.

Ni discret, ni continu

Exemple. Un automobiliste arrive à un feu. Avec probabilité $\frac{1}{2}$, le feu est vert et il n'attend pas ; sinon, il attend un temps choisi au hasard dans $]0, 60]$ secondes.

Pour $0 \leq t \leq 60$, par la loi des probabilités totales,

$$\mathbb{P}(\text{attente} \leq t) = \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{t}{60}.$$

Comme $\mathbb{P}(\text{attente} = 0) = \frac{1}{2} > 0$, ce n'est pas une loi à densité ; comme l'attente prend un continuum de valeurs, ce n'est pas une loi discrète.



Le cadre de Kolmogorov traite aussi ce cas mixte.

Remarques

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.
- Les figures ont été réalisées en utilisant TikZ (un paquet de LaTeX).

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.