Espérance mathématique (partie 1)

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Hiver 2025

Résumé

1. Espérance
2. Espérance d'une fonction d'une v.a.
3. Moments d'une v.a.
4. Variance et écart-type d'une v.a.

1

Espérance

Définition - cas absolument continu

Définition - cas absolument continu

Définition. Soit X une v.a. avec densité $f(x)$. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

l'espérance de X est définie par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Définition - cas absolument continu

Définition. Soit X une v.a. avec densité $f(x)$. Si

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| f(x) dx < \infty,$$

l'espérance de X est définie par

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx.$$

Définition de l’espérance — cas discret

Définition de l'espérance — cas discret

Définition. Soit X une v.a. discrète dont la fonction de masse est $p(x)$ telle que

$$\sum_{x \in \mathbb{R}} |x|\, p(x) < \infty.$$

L'espérance mathématique de la variable aléatoire X, dénotée $\mathbb{E}(X)$, est définie par

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in \mathbb{R}} x p(x).$$

2

Espérance d’une fonction d’une v.a.

Calcul de l’espérance d’une fonction d’une v.a.

Calcul de l'espérance d'une fonction d'une v.a.

Théorème. Soit X une v.a. aléatoire dont la fonction de densité de probabilité est $f(x)$ dans le cas absolument continu, et dont la fonction de masse est $p(x)$ dans le cas discret. Soit g une fonction à valeurs réelles dont le domaine contient l'ensemble des valeurs possibles de X. Alors

$$\mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} g(x)\, p(x) & \text{dans le cas discret,} \\ \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\, f(x) dx & \text{dans le cas absolument continu.} \end{cases}$$

Linéarité de l’espérance

Linéarité de l'espérance

Théorème. Soit X une v.a. aléatoire dont l'espérance existe. Alors

$$\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$$

pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.

Linéarité de l’espérance - suite

Linéarité de l'espérance - suite

Théorème. Soit X une v.a., et soit $g_1, g_2, \dots g_n$, des fonctions réelles dont le domaine contient l'ensemble des valeurs possibles pour X.

$$\mathbb{E}\left(\sum_{k=1}^{n} g_k(X)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}(g_k(X)).$$

3

Moments d’une v.a.

Moments par rapport à l'origine

Moments par rapport à l'origine

Définition. Soit X une v.a., et soit $n \in \mathbb{N}$. Le nombre $\mathbb{E}(X^n)$ s'appelle le n^{e} **moment de la v.a.** X **par rapport à l'origine**.

Remarque. On dit aussi qu'il s'agit simplement du n^{e} **moment de la v.a.** X**.**

Moments centraux

Moments centraux

Définition. Soit X une v.a. dont le premier moment par rapport à l'origine existe, et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Si $\mu_X = \mathbb{E}(X)$, le nombre $\mathbb{E}((X - \mu_X)^n)$ s'appelle le n^{e} **moment central de la v.a.** X.

Remarque. Le premier moment central d'une v.a. est toujours nul.

Variance et écart-type

Variance et écart-type

Définition. Le deuxième moment central d'une v.a. s'appelle la **variance** de la v.a., et on la note $\mathrm{Var}(X)$ ou σ_X^2. La racine carrée de la variance s'appelle **l'écart-type** de la v.a., il est noté σ_X.

4

Variance et écart-type d’une v.a.

Variance

Variance

Définition. Soit X une v.a. dont l'espérance est μ_X. Supposons que p soit la fonction de masse de X si X est une v.a. discrète, ou que f soit la densité de X si elle est absolument continue. La variance de X, notée $\mathrm{Var}(X)$, est définie par

$$\mathrm{Var}(X) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} (x - \mu_X)^2 \, p(x) & \text{(cas discret)}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_X)^2 \, f(x) dx & \text{(cas absolument continu)}. \end{cases}$$

Outils de calcul

Remarque. On écrit parfois $V(X)$ ou $V[X]$ pour désigner la variance de X.

Théorème. Soit X une v.a., et soit a et b des nombres réels. Alors

1. $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$;
2. $\mathrm{Var}(aX + b) = a^2 \mathrm{Var}(X)$.

Écart-type et écart absolu moyen

Écart-type et écart absolu moyen

Définitions.

- Soit X une v.a. dont la variance est $\mathrm{Var}(X)$. L'écart-type de X, noté σ_X, est défini par
$$\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}.$$
- Soit X une v.a. dont l'espérance est μ_X. L'écart absolu moyen de X, noté δ_X, est défini par
$$\delta_X = \mathbb{E}(|X - \mu_X|).$$

Remarques

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.