Espérance mathématique (partie 2)

À l'intention des étudiants de STT-1500



Jérôme Soucy

Département de mathématiques et de statistique
Université Laval

Hiver 2025

Résumé

1. Moments d'une v.a.
2. Approximations des moments
3. Fonction génératrice des moments

1

Moments d’une v.a.

Moments par rapport à l'origine

Moments par rapport à l'origine

Définition. Soit X une v.a., et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Le nombre $\mathbb{E}(X^n)$ s'appelle le n^{e} **moment de la v.a.** X **par rapport à l'origine**.

Remarque. On dit aussi qu'il s'agit simplement du n^{e} **moment de la v.a.** X**.**

Moments centraux

Moments centraux

Définition. Soit X une v.a. dont le premier moment par rapport à l'origine existe, et soit $n \in \mathbb{N}$. Si $\mu_X = \mathbb{E}(X)$, le nombre $\mathbb{E}((X - \mu_X)^n)$ s'appelle le **n^{e} moment central de la v.a. X**.

Remarque. Le premier moment central d'une v.a. est toujours nul.

Moments factoriels

Moments factoriels

Définition. Soit X une v.a., et soit $n \in \mathbb{N}^\star$. Le nombre

$$\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)\cdot\ldots\cdot(X-(n-1))$$

s'appelle le n^{e} **moment fatoriel de la v.a.** X.

Remarque. Le premier moment factoriel d'une v.a. est égal au premier moment par rapport à l'origine.

Coefficient d’asymétrie

Coefficient d'asymétrie

Définition. Soit X une v.a. dont le troisième moment central existe. Le nombre

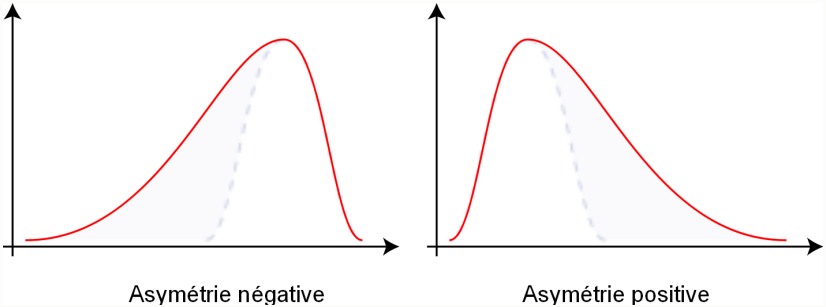
$$\gamma_X := \mathbb{E}\left(\left(\frac{X-\mu_X}{\sigma_X}\right)^3\right)$$

s'appelle le **coefficient d'asymétrie de la distribution de la v.a.** X.

- Si $\gamma_X = 0$, la distribution est symétrique.
- Si $\gamma_X > 0$, la distribution est étirée vers la droite.
- Si $\gamma_X < 0$, la distribution est étirée vers la gauche.

Coefficient d’asymétrie -suite

Coefficient d'asymétrie -suite



Par Rodolfo Hermans (en.wikipedia)

L’espérance — cas général

L'espérance — cas général

Théorème. Soit X une v.a. dont la fonction de répartition est $F_X(x)$. Supposons qu'au moins une des deux intégrales ci-dessous converge. Alors

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))\, dx - \int_{-\infty}^{0} F_X(x) dx.$$

Corollaire. Dans le cas où X prend des valeurs non négatives, nous avons que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty (1 - F_X(x))\, dx = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx.$$

Corollaire. Dans le cas où X est discrète et prend des valeurs non négatives, nous avons que

$$\mathbb{E}(X) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > x) dx = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > k) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(X \geq n).$$

2

Approximations des moments

Approximation pour $\mathbb{E}(g(X))$

Approximation pour $\mathbb{E}(g(X))$

Proposition. Soit X une v.a. dont l'espérance est μ_X. Si g est une fonction dérivable deux fois, alors on peut approximer $\mathbb{E}(g(X))$ à l'aide de l'équation

$$\mathbb{E}(g(X)) \approx g(\mu_X) + \frac{1}{2} g''(\mu_X)\sigma_X^2.$$

Approximation pour $\mathrm{Var}(g(X))$

Approximation pour $\mathrm{Var}(g(X))$

Proposition. Soit X une v.a. dont l'espérance est μ_X, et la variance σ_X^2. Si g est une fonction dérivable, alors on peut approximer $\mathrm{Var}(g(X))$ à l'aide de l'équation

$$\mathrm{Var}(g(X)) \approx \left(g'(\mu_X)\right)^2 \sigma_X^2.$$

3

Fonction génératrice des moments

Définition de la fonction génératrice des moments

Définition de la fonction génératrice des moments

Définition. La fonction génératrice des moments d'une v.a. X est la fonction définie par

$$M(t) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{tX}).$$

Ainsi, nous avons que

$$M(t) = \begin{cases} \sum_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx}\, p(x) & \text{(cas discret)}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} f(x)\, dx & \text{(cas absolument continu)}. \end{cases}$$

On utilise l'abréviation fgm pour parler de la fonction génératrice des moments.

Propriétés

Propriétés

Définition. On dit que la fgm $M(t)$ est finie autour de l'origine s'il existe $t_0 > 0$ tel que $M(t) < \infty$ pour tout $t \in]-t_0, t_0[$.

1. $0 < M(t) \leq \infty \forall t \in \mathbb{R}$;
2. $M(0) = 1$;
3. Si X et Y sont deux v.a. possédant la même fgm, et si la fgm est **finie autour de l'origine**, alors X et Y possèdent la même distribution ;
4. Si X possède une fgm $M(t)$ finie autour de l'origine, alors toutes les dérivées de M existent, sont finies, et sont continues autour de l'origine. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a que

$$\mathbb{E}(X^n) = \frac{d^n}{dt^n} M(t)|_{t=0}.$$

Remarques

Remarques.

- Ce document est rédigé avec Beamer, une classe de LaTeX.

Pour signaler une erreur dans ce document, veuillez écrire à jerome.soucy@mat.ulaval.ca.